Matemáticas 3

Tercer grado

Lilia Raull Ariza
Juan Antonio González Macías
Julio Arnoldo Prado Saavedra

IGNIS

ESFINGE

SECUNDARIA

Dirección general: Gabriel Torres Messina
Dirección editorial: Rosa María Núñez Ochoa
Coordinación editorial de Matemáticas: Leoncio Montiel Mejía
Diseño de interiores: Campomanes & Asociados
Diagramación y adaptación: José Arturo Martínez del Campo H., Alejandro Ruiz M. Alma Rosa Regato M.
Revisión técnica: Gerardo Alfonso Jaso Nacif y Alejandro Ruiz Macías
Corrección: Lidia Patricia Martínez Martínez
Iconografía: Guadalupe Sánchez
Ilustraciones: Fran de Anda, Miguel Macías y José Arturo Martínez del Campo
Ilustraciones de entradas de bloque: Dimage Creativos
Fotografía: FotoDisk, Shutterstock images y Archivo Esfinge

Colaboración especial: Lilia Raull Ariza, Juan Antonio González Macías, Julio Arnoldo Prado Saavedra

Matemáticas 3. Serie Ignis

Átomo 24
Col. Parque Industrial Naucalpan
Naucalpan de Juárez, Estado de México
C. P. 53489

ISBN: 978-607-10-0862-6 (Edición revisada)

Primera edición: 2015
Sexta reimpresión: 2019

Impreso en México
Printed in Mexico

Presentación

Las matemáticas siempre han formado parte de nuestra vida cotidiana siendo una herramienta que ayuda a desarrollar una sistematización del pensamiento, por ende nos incita a pensar de manera ordenada.

Las encontramos por todos lados y en donde menos lo esperamos. Por ejemplo en el deporte, en el juego, en la arquitectura, en las elecciones, en la medicina, en el mercado, en el pronóstico del tiempo, en los videojuegos, en la música, en las ciencias, etcétera.

Nacen como una respuesta a las necesidades de cada una de las culturas que han existido a través de miles de años. Los griegos, babilónicos, egipcios, entre otros, eran grandes observadores y veían a las matemáticas como un "lenguaje de la naturaleza"; eran capaces de hacer todo tipo de predicciones y obtener conclusiones que les ayudaban a resolver diferentes situaciones.

Con este libro se pretende, como en las grandes culturas, observar, analizar, razonar, deducir, argumentar y construir el saber matemático para tener una nueva visión de las matemáticas.

A través de actividades individuales, en parejas y grupales, se enseña a trabajar en equipo, argumentar y comunicar matemáticamente entre los estudiantes y entre éstos y su profesor, así como mostrar que las matemáticas no son mecanizaciones ni memorización de fórmulas. En resumen, la obra se enfoca en aportar los elementos para encontrar un sentido práctico a las matemáticas en la vida diaria.

Este libro consta de cinco bloques, en cada uno de ellos se trabaja con tres ejes temáticos que abarcan diferentes temas.

- Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Forma, espacio y medida
- Manejo de la información

Al comienzo de cada lección se hace énfasis en los conocimientos previos que se debe tener para que exista una mejor construcción del conocimiento y que el aprendizaje sea significativo.

Al final de cada bloque el profesor podrá encontrar una evaluación de los contenidos.

Deseamos que este libro, Matemáticas 3, satisfaga las necesidades del profesor para lograr el aprendizaje significativo de la asignatura.

Presentación para los alumnos

Estimado alumno:

El libro que tienes en tus manos fue elaborado con el propósito de complementar tu estudio a través de la práctica y para desarrollar tu competencia matemática mediante ejercicios que te permitan analizar, deducir, inferir, cuestionar, argumentar y razonar.

Los contenidos están diseñados y organizados de tal forma que podrás resolver problemas, realizar actividades en equipo, fortalecer habilidades, comprender procedimientos, validar resultados y hacer matemáticas cada vez más profundas. El modelo constructivista en el que se basa, te ayudará a vivir las matemáticas de un modo significativo y, por lo tanto, comprenderlas y practicarlas sin necesidad de mecanizar, ya que lo más importante es despertar y cultivar el razonamiento lógico-matemático.

En esta etapa de tu vida escolar, podrás constatar que las matemáticas no son sólo una asignatura, sino que son parte de nuestra vida cotidiana, de ahí la importancia de no tener miedo a ellas, sino de ejercitarlas y aplicarlas. Este trabajo te preparará para iniciar el siguiente nivel educativo con las bases suficientes para continuar procesando información matemática, lo que te hará capaz de aprender nuevos conceptos e ideas y de hacerte competente en esta área. La reflexión también será una herramienta que deberás poner en práctica para comprender los conceptos teóricos y resolver distintos tipos de problemas, de índole aritmético o algebraico, en situaciones reales.

A lo largo de las lecciones podrás observar que existen ejercicios, explicaciones, actividades sugeridas, definiciones y glosarios, con los cuales podrás repasar los contenidos y conceptos aprendidos. Utiliza y aprovecha estos recursos que fueron creados para facilitar tu trabajo tanto en clase como en casa.

Deseamos que este libro sea un referente importante en este último año de secundaria y que realices con éxito tus estudios.

Presentación para los maestros

Estimado profesor:

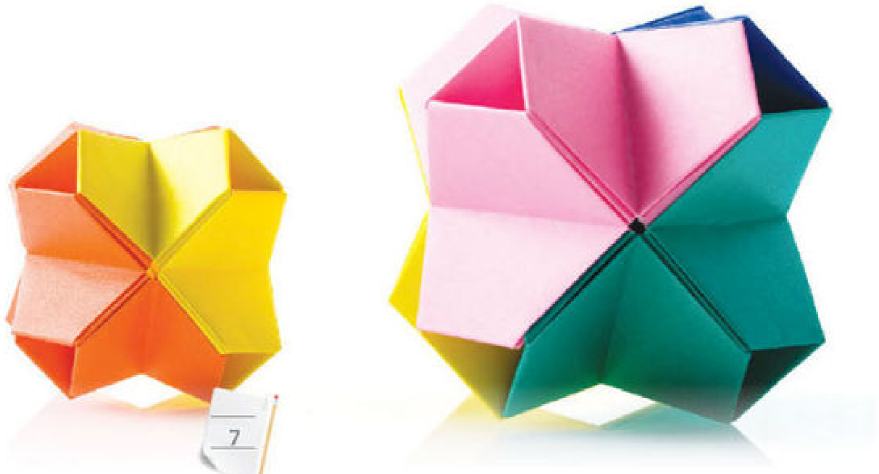
La enseñanza de las matemáticas en un mundo cada vez más invadido por la tecnología es hoy en día uno de los principales retos de los docentes, toda vez que los estudiantes están acostumbrados a obtener resultados de manera inmediata sin analizarlos ni verificar su validez.

El presente libro tiene como objetivo convertirse en una herramienta de trabajo para propiciar que el alumno se cuestione y se involucre en su aprendizaje, mediante el diseño de ejercicios que promuevan el razonamiento y la participación tanto individual como colectiva. Además, pretende ser un punto de partida para que usted, aprovechando su experiencia, enriquezca las actividades propuestas e introduzca sus propias ideas para complementar el aprendizaje de sus alumnos.

En este contexto, el profesor de matemáticas deberá propiciar el intercambio de ideas y fomentar que los estudiantes busquen y encuentren alternativas para resolver diferentes problemas, y que entre todos lleguen a un acuerdo sobre las formas de solucionarlos. De igual modo, deberá ser un guía que oriente el trabajo de sus alumnos a través de la introducción y fortalecimiento de nuevos conceptos y del uso de las TIC. Estos dos aspectos permitirán que el alumno tenga un referente teórico y que además pueda visualizar y manipular dicha información gracias a recursos como páginas interactivas de internet y otras estrategias que reforzarán sus habilidades matemáticas.

Esperamos que este libro sea provechoso y de utilidad para la labor que desempeña y que contribuya a la formación de alumnos con mayor capacidad de razonamiento, argumentación y pensamiento lógico-matemático. Le deseamos mucho éxito en esta valiosa tarea de inculcar en los estudiantes el gusto por las matemáticas.

Contenido



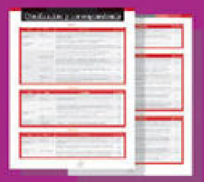
Conoce tu libro

1. Estructura general

A continuación te presentamos las secciones que integran tu libro.

Presentación del libro, del alumno y del profesor.

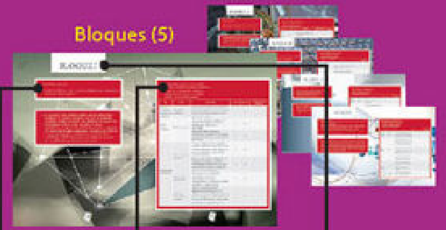
Índice



Dosificación y correspondencia de los contenidos

Los temas que estudiarás están distribuidos en cinco bloques.

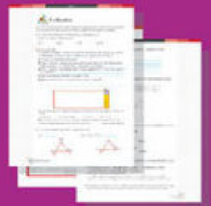
Bloques (5)



Aprendizajes esperados

Competencias que se favorecen

Número de bloque



Evaluación

Se encuentra al final de cada bloque, aquí se pondrán a prueba los conocimientos adquiridos del estudiante contra los aprendizajes esperados.

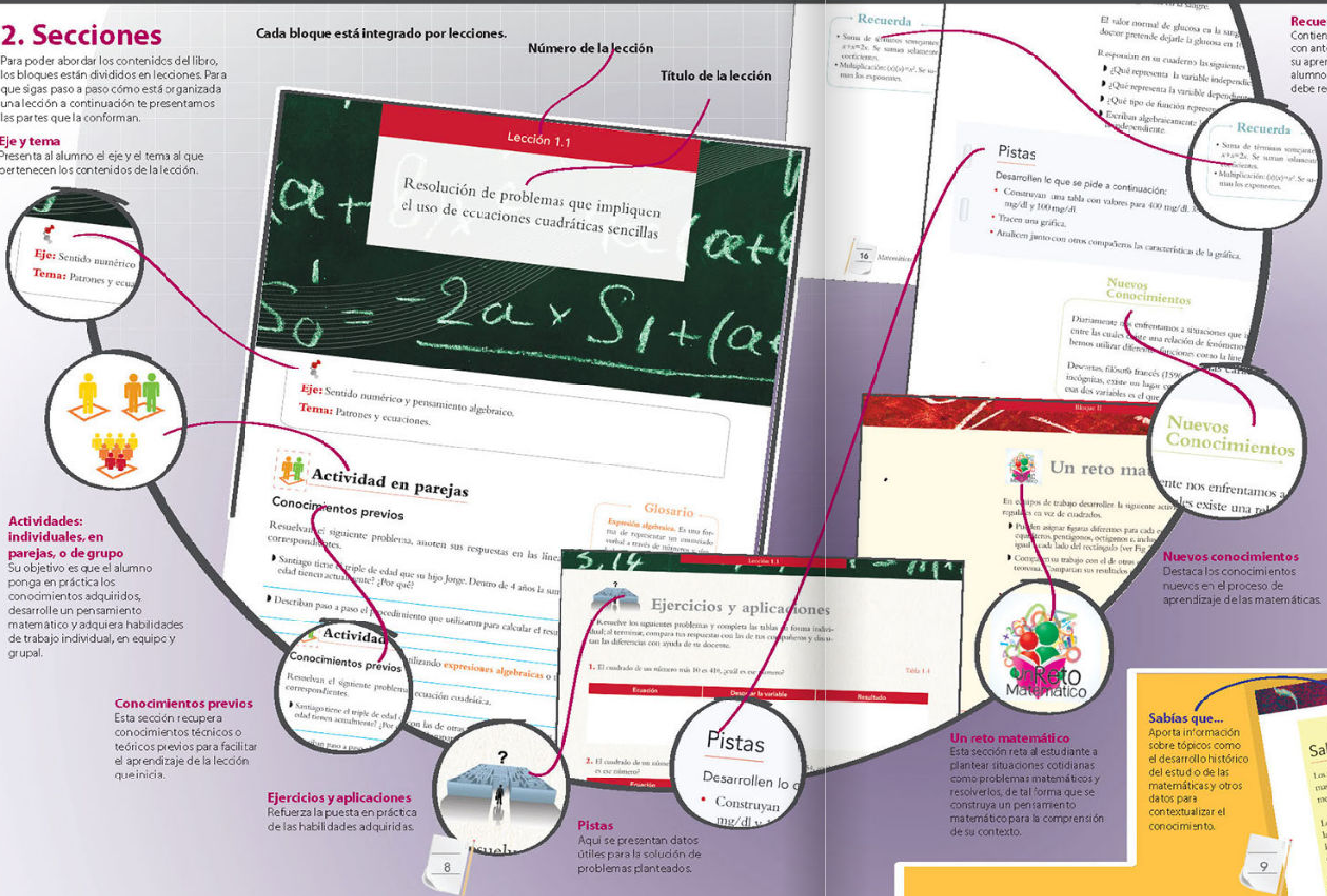
2. Secciones

Para poder abordar los contenidos del libro, los bloques están divididos en lecciones. Para que sigas paso a paso cómo está organizada una lección a continuación te presentamos las partes que la conforman.

Cada bloque está integrado por lecciones.

Número de la lección

Título de la lección



Eje y tema
Presenta al alumno el eje y el tema al que pertenecen los contenidos de la lección.

Actividades: individuales, en parejas, o de grupo
Su objetivo es que el alumno ponga en práctica los conocimientos adquiridos, desarrolle un pensamiento matemático y adquiera habilidades de trabajo individual, en equipo y grupal.

Conocimientos previos
Esta sección recupera conocimientos técnicos o teóricos previos para facilitar el aprendizaje de la lección que inicia.

Ejercicios y aplicaciones
Refuerza la puesta en práctica de las habilidades adquiridas.

Pistas
Aquí se presentan datos útiles para la solución de problemas planteados.

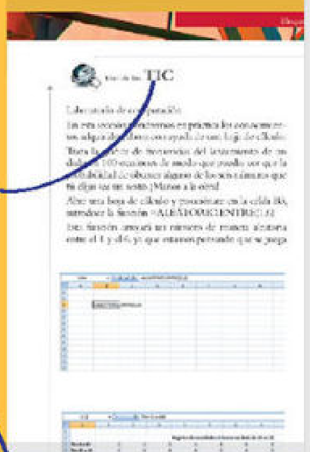
Un reto matemático
Esta sección reta al estudiante a plantear situaciones cotidianas como problemas matemáticos y resolverlos, de tal forma que se construya un pensamiento matemático para la comprensión de su contexto.

Nuevos conocimientos
Destaca los conocimientos nuevos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

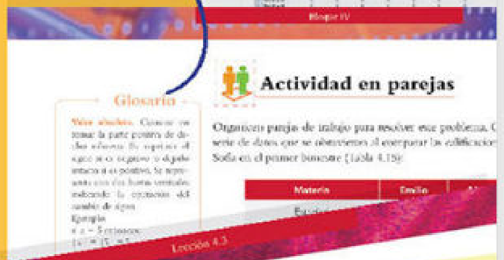
Recuerda
Contiene información vista con anterioridad para reforzar su aprendizaje y ayudar al alumno a identificar cuándo debe recurrir a ella.

3. Recursos didácticos de apoyo:

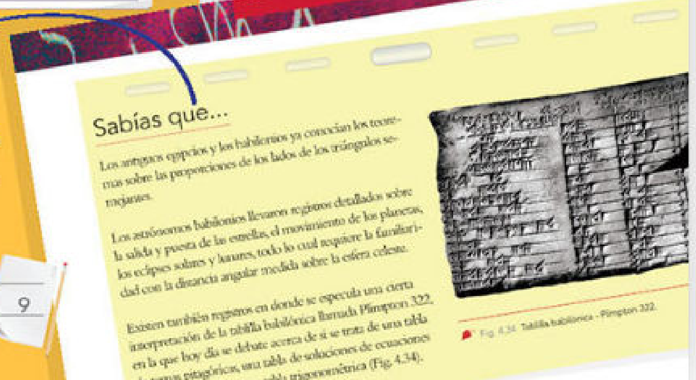
Son elementos que no forman parte de la estructura central del libro pero sirven para profundizar en los conceptos que estás estudiando, relacionarte con otras áreas del conocimiento, explorar recursos electrónicos y multimedia o presentarte lecturas interesantes.



Uso de las TIC
Se propone para relacionar al alumno con las herramientas tecnológicas disponibles para el planteamiento y la solución de problemas.



Glosario:
Presenta una definición clara y funcional de los principales términos matemáticos de las lecciones.



Sabías que...
Aporta información sobre tópicos como el desarrollo histórico del estudio de las matemáticas y otros datos para contextualizar el conocimiento.

Dosificación y correspondencia

Bloque I

Eje	Tema	Contenido	Lección
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	1.1
Forma espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	1.2
		Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	1.3
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	1.4
		Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	1.5
	Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	1.6
	Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	1.7

Bloque II

Eje	Tema	Contenido	Lección
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	2.1
Forma espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	2.2
		Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	2.3
		Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	2.4
	Medida	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	2.5
Manejo de la información	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	2.6

Bloque III

Eje	Tema	Contenido	Lección
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	3.1
Forma espacio y medida	Figuras y cuerpos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	3.2
		Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	3.3
		Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	3.4
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	3.5
		Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	3.6
	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	3.7

Bloque IV

Eje	Tema	Contenido	Lección
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	4.1
Forma espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	4.2
	Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	4.3
		Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	4.4
		Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	4.5
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	4.6
	Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	4.7

Bloque V

Eje	Tema	Contenido	Lección
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	5.1
Forma espacio y medida	Medida	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	5.2
		Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	5.3
		Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	5.4
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	5.5
	Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	5.6

BLOQUE I

Aprendizajes esperados

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Con este bloque inicias el tercer y último curso de tu formación matemática en la escuela secundaria. A lo largo de sus páginas encontrarás nociones, conceptos y procedimientos con los que estás familiarizado y sobre los cuales construirás los nuevos conocimientos. Accederás a la resolución de ecuaciones cuadráticas, a la construcción de figuras congruentes y semejantes, al análisis de la representación gráfica, al conocimiento de la escala de la probabilidad y al diseño de encuestas para realizar experimentos con una población en estudio, entre otros temas.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Planeación del Profesor
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	1.1	1	
Forma espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	1.2	2	
		Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	1.3	3	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	1.4	4	
		Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	1.5	5	
	Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	1.6	6	
	Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	1.7	7	

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tema: Patrones y ecuaciones.

Actividad en parejas

Conocimientos previos

Resuelvan el siguiente problema, anoten sus respuestas en las líneas correspondientes.

- Santiago tiene el triple de edad que su hijo Jorge. Dentro de 4 años la suma de sus edades será 88 años. ¿Qué edad tienen actualmente? ¿Por qué?
- Describan paso a paso el procedimiento que utilizaron para calcular el resultado.
- ¿Cómo representarían el problema utilizando **expresiones algebraicas** o una ecuación cuadrática?
- Expliquen su expresión algebraica o su ecuación cuadrática.
- Comparen sus propuestas de solución con las de otras parejas, comenten cuál o cuáles podrían representar mejor el problema anterior y expliquen por qué. Compartan sus respuestas con su profesor.

Glosario

Expresión algebraica. Es una forma de representar un enunciado verbal a través de números y símbolos que nos ayuda a resolver problemas matemáticos.

Actividad individual

¡Averigua qué número es!

Jaime pensó en el doble del cuadrado de un número, luego le sumó 15 y el resultado le da 65.

- Nicolás representó el problema así: $x^2+x^2+15=65$.
- Alejandro utilizó el siguiente procedimiento para resolver el problema: $2(5)(5)+15=65$.
- Iván propuso lo siguiente: $2(-5)(-5)+15=65$.

- Explica cada uno de los procedimientos utilizados para resolver el problema y argumenta por qué son correctos.

Recuerda

Jerarquía de operaciones

Para resolver correctamente una operación aritmética (Fig. 1.1):

- Primero se resuelven las operaciones entre paréntesis, corchetes y llaves.
- Después se calculan potencias y raíces.
- Posteriormente se da respuesta a productos y cocientes.
- Al final se calculan sumas y restas.

Actividad en parejas

Analicen los siguientes planteamientos y contesten las preguntas en las líneas:

- Susana, quien escuchaba a sus amigos, dijo que los tres tenían la razón en cuanto a sus procedimientos y resultados. ¿Están de acuerdo con Susana? Argumenten, si están de acuerdo, por qué cada uno de los tres procedimientos es correcto.
- Observen el siguiente cuadrado (Fig. 1.2) y expliquen qué significa un número al cuadrado.
- Expliquen lo que sucede cuando multiplicamos dos cantidades negativas.
- ¿Qué otro número puede ir en el cuadrado que no sea 5? ¿Por qué?
- ¿Qué números son los que satisfacen la ecuación? Discútanlo con otra pareja.

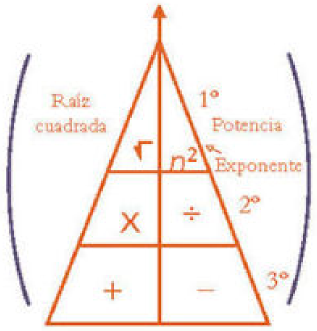


Fig. 1.1 Jerarquía de operaciones.

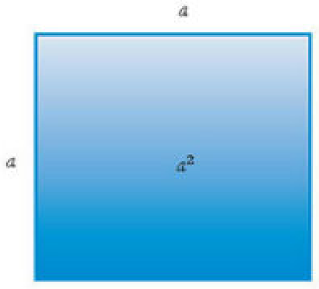


Fig. 1.2 ¿Qué significa un número al cuadrado?

- Susana invitó a sus amigos a comer en su casa, les dijo que vivía en la calle Independencia y el número del domicilio lo indicó a través de la siguiente adivinanza:

  El cuadrado de un número menos el mismo número es igual a 132.

- ¿Qué número es el de la casa?

- Describan el procedimiento que siguieron.

- ¿El resultado puede ser negativo? Expongan sus argumentos a otras parejas.

- Comenten las respuestas con el resto del grupo y describan los diferentes procedimientos que emplearon.
- Con el apoyo de su docente, lleguen a un acuerdo acerca de cuáles son correctos y expliquen por qué.

Los conocimientos

Las ecuaciones cuadráticas sirven para representar y resolver diferentes problemas de la vida real. Para resolver este tipo de ecuaciones primero debemos plantearlas en lenguaje algebraico y encontrar la ecuación adecuada. Una expresión algebraica está formada de tres partes: coeficiente, variables o literales y signos de operación +, −, $5x+4y^3$.

- Observa la tabla 1.1 y complementa la 1.2. Al terminar, compara tu trabajo con el de otros estudiantes y discutan las diferencias.
- En grupo, lleguen a respuestas comunes con el apoyo de su maestro.

Recuerda

- Suma de términos semejantes: $x+x=2x$. Se suman solamente coeficientes.
- Multiplicación: $(x)(x)=x^2$. Se suman los exponentes.

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
El cuadrado de un número menos el mismo es igual a 90.	$x^2-x=90$
La mitad de la suma del triple de un número más el quíntuple de otro.	$\frac{3x+5y}{2}$

Tabla 1.1

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
	$x^2+10=x+30$
La mitad de la suma de dos cuadrados.	
	$x(2x+10)=48$
La tercera parte de la raíz cuadrada de un número.	

Tabla 1.2

Actividad individual

¡Resolvamos lo siguiente!

La mitad del cuadrado de un número es 18.
¿Qué número es?

Lo primero es pasar del lenguaje verbal al lenguaje algebraico para luego formular la ecuación.

- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la situación planteada? Explica tu respuesta a otro estudiante.

$$\frac{x}{2}=18 \qquad \frac{x^2}{2}=18 \qquad \frac{x}{2^2}=18$$

Existen diferentes procedimientos para resolver problemas de este tipo.

Ensayo y error

Realiza lo que se indica a continuación:

- En la tabla 1.3 prueba con varios números para asignar un valor a la x, con el propósito de saber cuál es el que cumple con esta ecuación.
- ¿Existe una sola respuesta correcta? Explica por qué.
- Compara tu trabajo con el de tus compañeros; mediante argumentos defiende tu trabajo.
- Si prevalecen las dudas, soliciten el apoyo de su profesor.

Tabla 1.3

x	$\frac{x^2}{2}=18$
-6	$\frac{(-6)^2}{2}=18$ $\frac{36}{2}=18$
-2	$\frac{(-2)^2}{2}=18$ $\frac{4}{2}\neq 18$
-1	$\frac{(-1)^2}{2}=18$ $\frac{1}{2}\neq 18$
0	$\frac{(0)^2}{2}=18$ $\frac{0}{2}\neq 18$
1	$\frac{(1)^2}{2}=18$ $\frac{1}{2}\neq 18$
2	$\frac{(2)^2}{2}=18$ $\frac{4}{2}\neq 18$
6	$\frac{(6)^2}{2}=18$ $\frac{36}{2}=18$

Sabías que...

Algunas civilizaciones ya utilizaban la raíz cuadrada en el año 500 a.n.e. Una de ellas eran los babilónicos, quienes crearon un sistema para construir cuadrados con el área de un rectángulo dado.
¿Se te ocurre cómo lograban hacerlo? Comenta con otros estudiantes.

Propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones

La raíz cuadrada es la operación inversa a elevar un número al cuadrado.

Cuando $x^2=n$, en donde n es cualquier número real, entonces $x=\pm\sqrt{n}$

Recuerda

Al elevar un número al cuadrado el resultado siempre será positivo.
$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$
$(3)^2 = (3)(3) = 9$

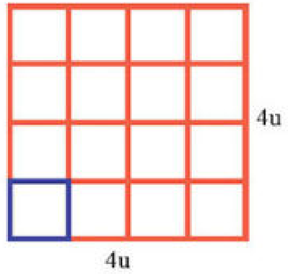


Fig. 1.3 El radicando debe ser un cuadrado perfecto.

Todos los números positivos, mayores que 0, tienen dos raíces cuadradas y pueden ser:

a) Raíz cuadrada exacta

La raíz es exacta cuando encontramos un número que elevado al cuadrado sea exactamente el mismo número que el radicando (Fig. 1.3), sin que exista algún residuo.

Potencia

$$\sqrt{16} = 4 \qquad 16 = 4^2$$

Radicando   Raíz o base

b) Raíz cuadrada no entera

La raíz cuadrada no es entera cuando el radicando no es un cuadrado perfecto.
Raíz cuadrada de 56:

$$+\sqrt{56} = 7.48 \text{ y } -\sqrt{56} = -7.48$$

Para facilitar la forma de expresar el resultado, la podemos escribir como $\pm$ 7.48

- ¿Cuándo utilizar la propiedad de la raíz cuadrada?

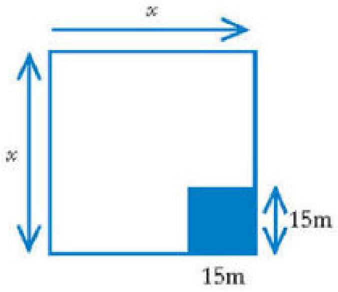


Fig. 1.4 ¿Cuánto mide cada lado del terreno?

La propiedad de la raíz cuadrada se utiliza para resolver ecuaciones de la forma:

$$x^2-100=0$$

Ejemplo:
El espacio de un terreno en donde se va a organizar una exposición de pintura mide 3 619 m². Una parte del terreno mide 15 m × 15 m y se ocupa como sala de conferencias (Fig. 1.4).

- ¿Cuánto mide cada lado del terreno?

Los pasos para resolver el problema son:

- Plantea la ecuación cuadrática. Recuerda, trasladar del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.

$$x^2 - 225 = 3\,619$$

- Despeja la variable, para lo cual tienes que sumar 225 a ambos lados

$$x^2 - 225 + 225 = 3\,619 + 225$$
$$x^2 = 3\,844$$

- Para obtener el valor de x calcula $\pm\sqrt{3\,844}$ ← *Propiedad de la raíz cuadrada*

Recuerda

- La raíz cuadrada de un número positivo tiene dos soluciones
- La raíz cuadrada de *cero* sólo tiene una solución
- La raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución

El problema tiene dos soluciones, ya que (62) (62)= 3 844 y (-62) (-62)=3 844; por lo tanto:

$$x_1 = 62 \qquad x_2 = -62$$

- La raíz cuadrada del problema anterior, ¿es positiva o negativa?
- Por lo tanto, ¿cuántas soluciones tiene el problema? Explica tu respuesta.
- ¿Cuántos valores para x cumplen las condiciones del problema? ¿Por qué?
- Las longitudes de los lados de un cuadrado, ¿pueden ser negativas? ¿Por qué?
- Discute tus respuestas con el resto de los estudiantes y con tu maestro.

ESFINGE

Ejercicios y aplicaciones

I. Resuelve los siguientes problemas y completa las tablas en forma individual; al terminar, compara tus respuestas con las de tus compañeros y discutan las diferencias con ayuda de su docente.

Tabla 1.4

1. El cuadrado de un número más 10 es 410, ¿cuál es ese número?

Ecuación	Despejar la variable	Resultado

2. El cuadrado de un número más el triple del mismo da como resultado 54, ¿cuál es ese número?

Ecuación	Despejar la variable	Resultado

3. El producto de dos números consecutivos es 1 640, ¿cuáles son esos números?

Ecuación	Despejar la variable	Resultado

4. El área del estacionamiento de un negocio es de 90 m². El largo excede en 27 m al ancho, ¿cuáles son las dimensiones del estacionamiento?

Ecuación	Despejar la variable	Largo

5. Responde en el lugar indicado:

- ¿Cuántas soluciones tiene el problema número cuatro?
- ¿Cuál es el valor de x que cumple las condiciones de dicho problema?
- En caso de que hubiera otro valor de x, ¿cuál sería?
- ¿Por qué no cumpliría con el requisito del problema? Explica.
- Con el apoyo de su maestro, escriban las respuestas en el pizarrón, no sin antes argumentar en favor o en contra de cada una.

II. En las siguientes figuras (1.5 y 1.6) encuentra y escribe el valor de x en el lugar correspondiente. No olvides responder las preguntas.

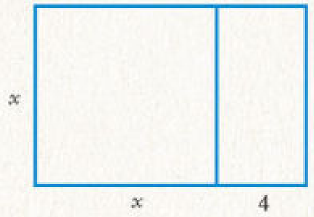


Fig. 1.5 ¿Cuál es el valor de x?

6. El área de la siguiente figura es igual a 285 u^2.

- ¿Qué valor tiene x? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Cuál sería la ecuación que representa esta situación? Explícala.

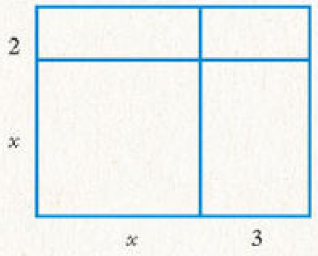


Fig. 1.6 ¿Cuál es el valor de x?

7. El siguiente rectángulo tiene un área de 506 u^2.

- ¿Cuál es el valor de x? ¿Cómo lo averiguaste?
- ¿Cuál es la ecuación que da solución a este problema? Explícala.
- ¿El resultado puede ser negativo? Argumenta tu respuesta.

III. Encuentra los valores de x que dan respuesta a las siguientes ecuaciones:

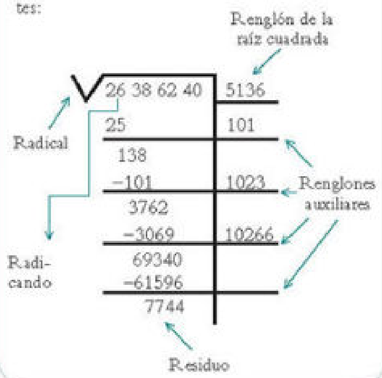
a) $x^2 - 9 = 0$
b) $(x - 10)^2 = 400$

c) $3x^2 - 12 = 0$
d) $x^2 + 5x = 248$

8. Con la asesoría de su profesor, organicen una dinámica en grupo para discutir las respuestas y escribir en el pizarrón, de común acuerdo, los procedimientos que siguieron.

Recuerda

Las partes de la raíz cuadrada son las siguientes:

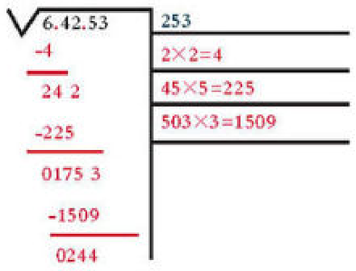


Métodos y tecnicismos

Algoritmo de la raíz cuadrada (Fig. 1.7):

- Se divide la cantidad de derecha a izquierda en periodos de dos en dos.
- Se buscan dos números que multiplicados por ellos mismos den 6 o cerca de 6. En este caso la cantidad es 2, ya que $2 \times 2 = 4$.
- Restamos $6 - 4 = 2$; y al lado de este número se baja el siguiente periodo que es 42, por lo tanto se tiene 242.
- El 2 de la raíz se duplica y es igual a 4 (segundo renglón auxiliar) y se escribe nuevamente el 4 en el tercer renglón auxiliar.
- Calculamos cuántas veces cabe el 4 en el 24 (valores absolutos), en este caso es 6 pero como se le agrega al 4 formando $46 \times 6 = 276$ se pasa del 242, por lo tanto se le agrega al 4 un número más pequeño, en este caso 5, formando la cantidad 45 y lo multiplicamos por ese mismo número 5. La multiplicación debe dar un número igual o menor que 242. En este caso la multiplicación es 225 y se le resta al 242, dando como resultado 17.
- A lado del 17 bajamos el siguiente periodo que es 53, formando la cantidad 1 753. Se duplica el 25 de la raíz, $25 \times 2 = 50$ y se busca un número que multiplicado por 50 dé como resultado un número lo más cerca de 175. En este caso es $50 \times 3 = 150$.
- Al 50 le agregamos el 3 $503 \times 3 = 1\,509$ (tercer renglón auxiliar.)
- A 1 753 le restamos 1 509 y nos queda 244.
- Para comprobar el resultado se multiplica la raíz al cuadrado más el residuo.
  - En parejas, revisen paso a paso el procedimiento descrito para constatar si es correcto (pueden utilizar la calculadora si es preciso).
  - Compartan con otras parejas sus observaciones y resultados.
  - Con el apoyo de su maestro, expliquen el procedimiento ante el resto del grupo. Aporten nuevos ejemplos si lo consideran pertinente.

Fig. 1.7 Algoritmo de la raíz cuadrada.



$\sqrt{64253} = 253^2 + 244$

Figuras congruentes o semejantes y análisis de sus propiedades

Eje: Forma, espacio y medida.

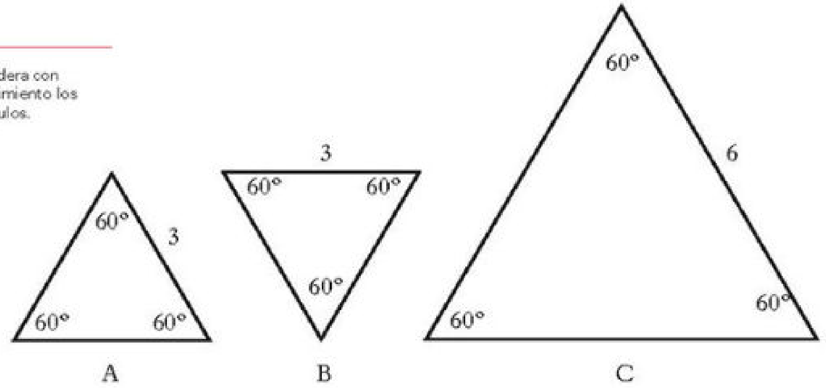
Tema: Figuras y cuerpos.

Actividad individual

Conocimientos previos

Observa los siguientes triángulos (Fig.1.8) y responde en los espacios indicados lo que se pregunta.

Fig. 1.8 Considera con detenimiento los triángulos.



- Compara los triángulos *A* y *B*. ¿Qué tienen en común? ¿Podría decirse que son iguales? Explica por qué.

- Ahora compara el triángulo *C* con los triángulos *A* y *B*. ¿Qué observas? ¿Los triángulos son semejantes entre sí? Explica por qué.

Dos triángulos son *congruentes* si son iguales entre sí, es decir, si cada uno de los lados y ángulos de un triángulo son iguales a los lados y ángulos correspondientes del otro triángulo.

Los triángulos *A* y *B* son congruentes ya que cumplen con las condiciones anteriormente mencionadas.

Pero el triángulo *C* es *semejante* a los otros dos, ya que también sus ángulos internos correspondientes tienen la misma medida y sus lados no son iguales, pero sí son proporcionales. Esta es la diferencia entre congruencia y semejanza.

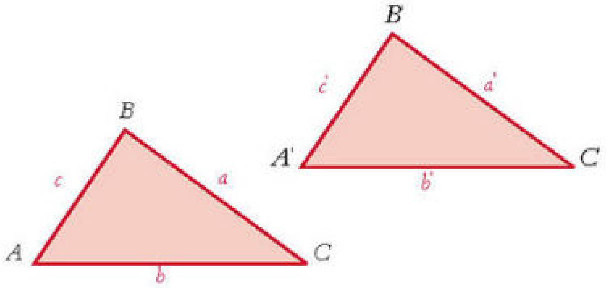
- ¿Cómo saber cuándo dos triángulos son semejantes entre sí y cuándo no lo son?

Existen tres reglas universales para comprobar la congruencia entre dos triángulos, la cual denotaremos de la siguiente manera:

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

Se lee "El triángulo ABC es congruente al triángulo $A'B'C'$" por los siguientes criterios:

Regla uno: criterio lado-lado-lado o LLL (Fig. 1.9)



$$a=a' \quad b=b' \quad c=c'$$

Fig. 1.9 Criterio lado-lado-lado o *LLL*.

Regla dos: criterio lado-ángulo-lado o *LAL* (Fig. 1.10)

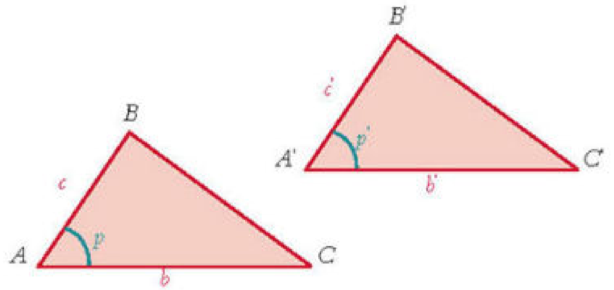


Fig. 1.10 Criterio lado-ángulo-lado o *LAL*.

$$b=b' \quad p=p' \quad c=c'$$

Regla tres: criterio ángulo-lado-ángulo o *ALA* (Fig. 1.11)

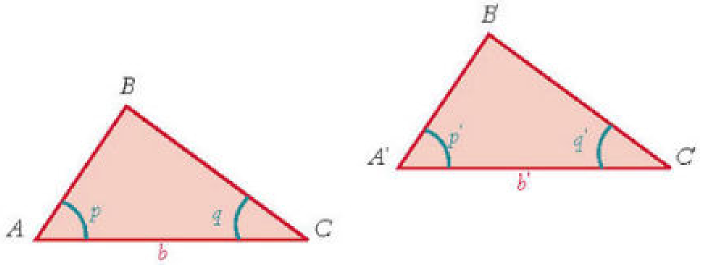


Fig. 1.11 Criterio ángulo-lado-ángulo o *ALA*.

$$q=q' \quad b=b' \quad p=p'$$

¡Cuidado! No existe el criterio *AAA*, ya que podemos tener triángulos con la misma medida de sus ángulos internos, pero sus lados correspondientes pueden ser diferentes como lo es el triángulo *ADE* con respecto al triángulo *ABC*. Mira (Fig. 1.12):

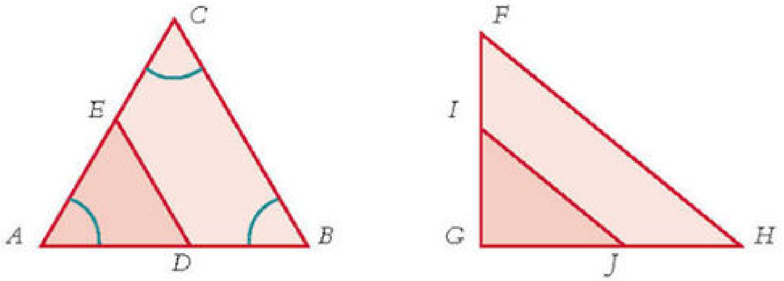
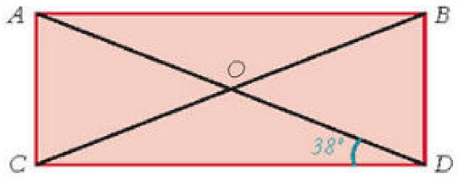


Fig. 1.12 Existen triángulos con la misma medida de sus ángulos internos, pero con sus lados correspondientes diferentes.

Actividad individual

Utiliza tu cuaderno para anotar los cálculos que se solicitan a continuación.

1. Considera el siguiente rectángulo con vértices en *ABCD* e identifica cuántos triángulos se forman en total. Escríbelos utilizando sus vértices para identificarlos (Fig. 1.13).



Recuerda

Si ΔABC es un triángulo cualquiera, la suma de sus ángulos interiores suman 180°.

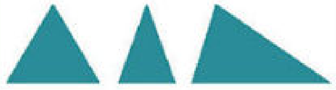


Fig. 1.13 Suma de los ángulos internos de un triángulo.

2. Cuando hayas identificado los triángulos presentes en la figura anterior, completa la tabla 1.5.

Triángulo	Triángulo congruente	Justificación	Criterio
ΔACD	ΔABD	$\overline{AB}=\overline{CD}$, $\measuredangle D=\measuredangle A$, $\overline{AD}=\overline{DA}$	*LAL*
ΔACB			
ΔAOC			
ΔCOD			
ΔBCD			

Tabla 1.5

- Compara tu trabajo con el de otros compañeros; expliquen mutuamente el procedimiento que siguieron para contestar.
- Si encuentran diferencias en los datos de la tabla, discútanlas y clarifiquen sus dudas con el apoyo de su profesor.

Actividad en equipo

A continuación observa estos tres cuadriláteros (Fig. 1.14).

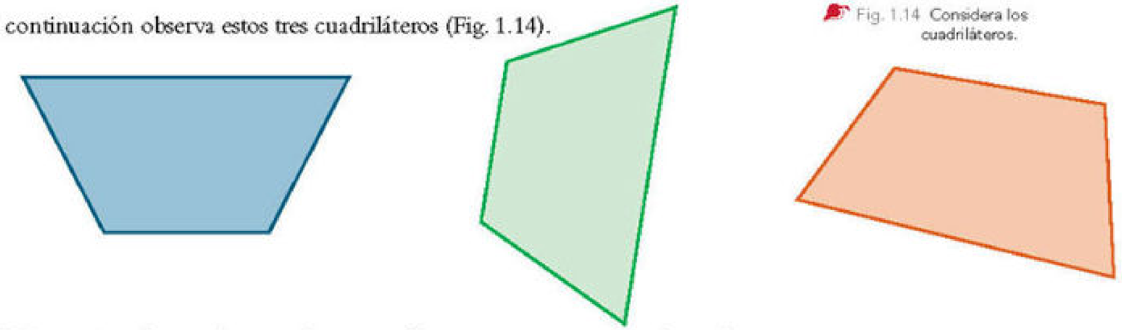


Fig. 1.14 Considera los cuadriláteros.

- En equipos de tres alumnos discutan cuáles son congruentes. Pueden utilizar regla graduada y transportador para obtener sus conclusiones.
- Compartan sus resultados con el profesor.

Actividad en equipo

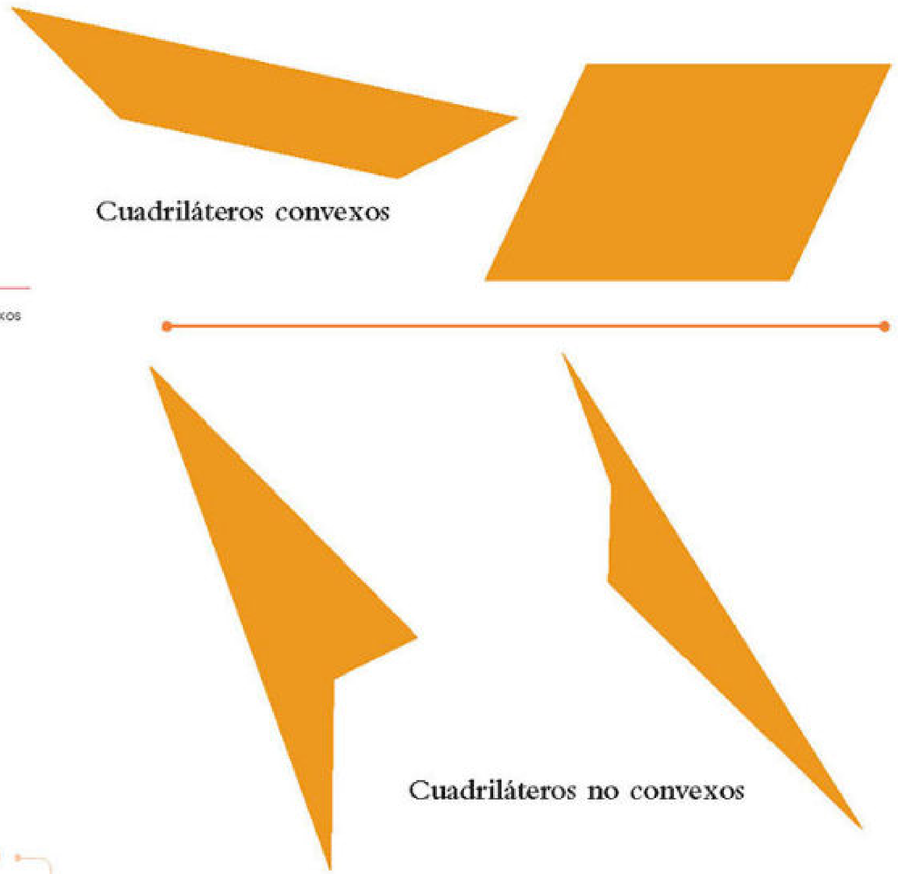


Fig. 1.15 Cuadriláteros convexos y no convexos.

Glosario

Cuadrilátero convexo. Un cuadrilátero es convexo si todos y cada uno de sus ángulos interiores son menores a 180°.

Actividad

Con los mismos equipos construyan un **cuadrilátero convexo** con las siguientes longitudes para cada segmento: $\overline{AB} = 3.2$ cm, $\overline{BC} = 1.9$ cm, $\overline{CD} = 2.8$ cm, $\overline{DA} = 3.2$ cm y, por último, el ángulo comprendido $< BCD = 111°$.

- Comparen el cuadrilátero que formaron con los de otros equipos y discutan si todos son congruentes o no, argumenten sus respuestas.

Tracen las diagonales que van de $\overline{AC}$ y de $\overline{BD}$.

- ¿Cuántos triángulos puede haber cuyos lados estén comprendidos por $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$, cuyo ángulo comprendido entre estos segmentos mida 111°? Identifíquenlos.

- ¿Hay más de un triángulo cuyos lados sean $\overline{BD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{CB}$? Descríbanlos.

- ¿Cuál criterio de congruencia asegura que este triángulo es único? Expliquen.

- Comparen sus respuestas con las de sus compañeros e indiquen qué figuras congruentes pueden encontrar con sus respectivos cuadriláteros convexos.
- Compartan sus conclusiones con el resto del grupo y, bajo la orientación de su maestro, construyan conclusiones comunes.

Actividad individual

Actividad

Considera los componentes de la figura 1.16 y responde lo que se pregunta.

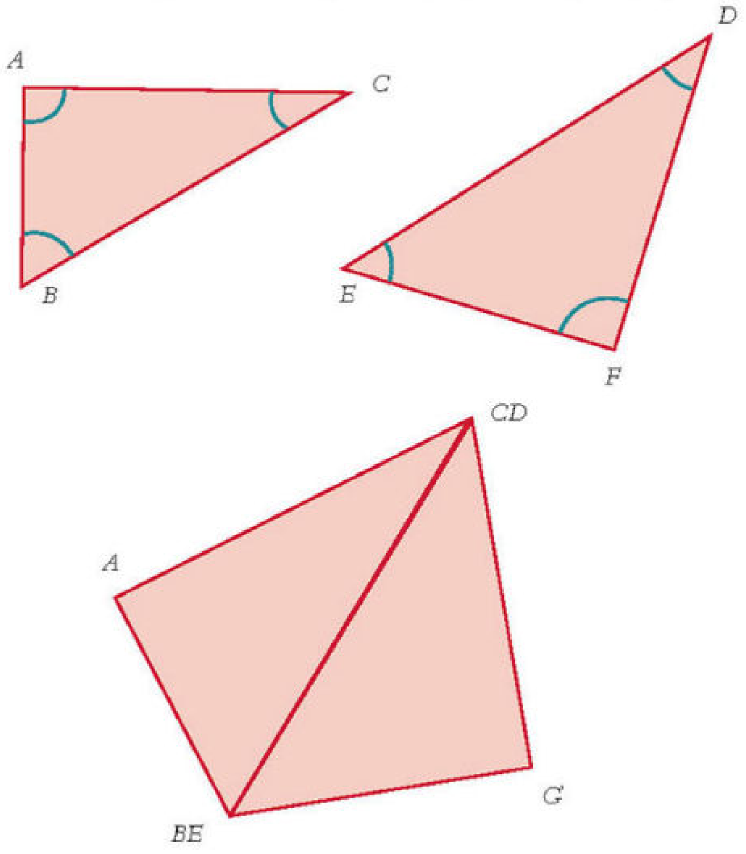


Fig. 1.16 Considera los componentes de las figuras.

- Si la suma de los ángulos internos de un triángulo arroja 180°, ¿qué puedes decir respecto a la suma de los ángulos internos de este cuadrilátero convexo?

- Si trazamos la diagonal BC, ¿cuánto miden los seis ángulos que se forman y cuánto suman?

- ¿Crees que se cumpla para todos los cuadriláteros?

- ¿Qué pasa si unes un triángulo más a uno de sus lados? ¿Qué figura se forma?

- ¿Podríamos saber la suma de sus ángulos internos?

- ¿Qué pasaría si repitiéramos este proceso pero ahora con triángulos congruentes a un isósceles?

- ¿Qué figuras se formarían empezando con uno, después con dos y así sucesivamente hasta llegar a 5?

- ¿Y si seguimos?

- Compara tu análisis con alguno de tus compañeros y juntos comenten sus razonamientos; compartan sus conclusiones con el profesor.

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve de manera individual los siguientes problemas; cuando termines, contrasta tus respuestas con las de otros estudiantes y discutan las diferencias, rectifiquen si es necesario y consulten libremente la lección estudiada.

1. Dados los siguientes triángulos (Fig. 1.17), determina cuáles son congruentes y bajo qué criterio lo justificas.

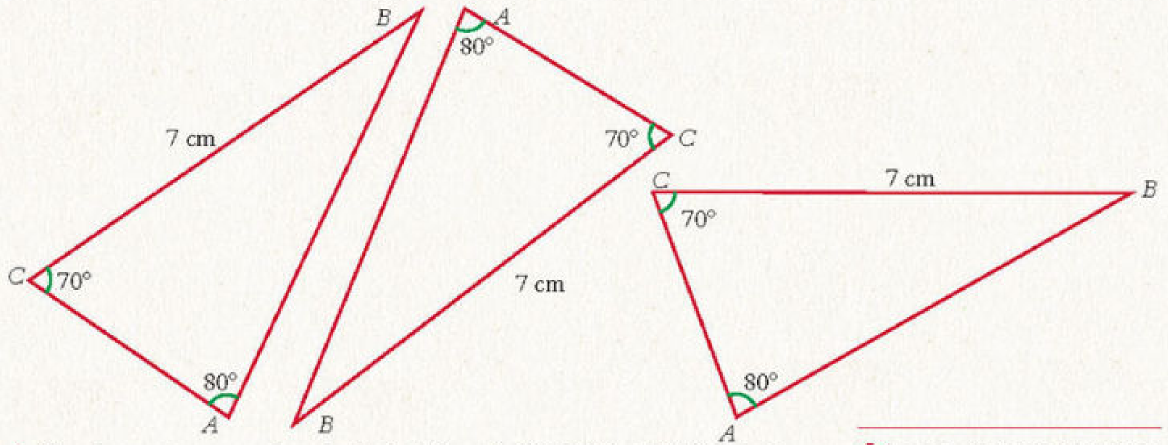


Fig. 1.17 ¿Cuáles son congruentes y bajo qué criterios?

2. Para demostrar que en el cuadrado de la figura 1.18 $\Delta ABC \cong \Delta BCD$, es decir, que los triángulos formados son congruentes, un alumno determinó que $AB \cong BD$, que $AC \cong DC$ y que el ángulo $CAB \cong$ ángulo BCD, por ser rectos. ¿Qué criterio de congruencia utilizó?

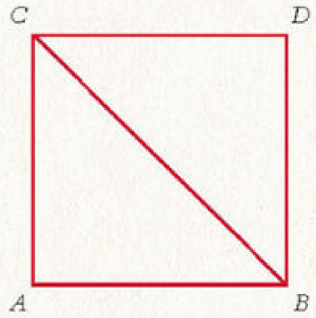


Fig. 1.18 ¿Bajo qué criterio los triángulos son congruentes?

3. En la figura 1.19, el ΔCDE es isósceles. C es punto medio de AD y D es punto medio de CB. ¿Qué criterio de congruencia permite demostrar que el $\Delta ACE \cong \Delta BDE$?

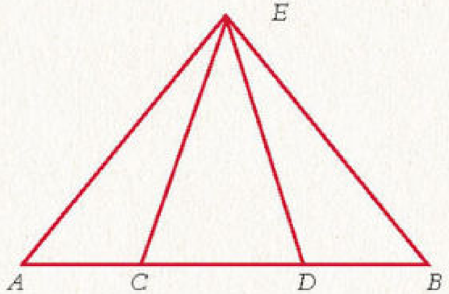


Fig. 1.19 Determina el criterio de congruencia.

4. ¿Cuál de estos enunciados son verdaderos y cuáles no? Explica tu respuesta.

- Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus ángulos agudos respectivos son congruentes.

- Dos triángulos son congruentes si sus lados homólogos miden lo mismo.

- Dos triángulos son congruentes si sus ángulos respectivos son iguales.

- Para demostrar que dos triángulos son congruentes se puede utilizar el criterio *AAL*.

- Todos los triángulos equiláteros son congruentes. ¿Por qué?

Un reto matemático

Observa con detenimiento el hexágono de la figura 1.20.

- ¿Cuántas diagonales necesitas para descomponerlo en triángulos? Explica por qué.

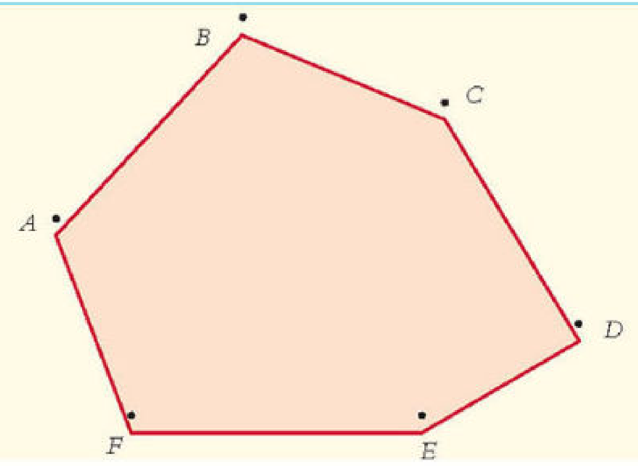


Fig. 1.20 ¿Con cuántas diagonales podrías dividir el hexágono en triángulos?

En la figura 1.21 se muestra que $\measuredangle\ \delta = 45°$.

- ¿Bajo qué criterio puedes afirmar que el triángulo *EFA* = al triángulo *ABC*? Toma en cuenta que el segmento *AF*=*AC*. Justifica tu respuesta y compártela con otros estudiantes.

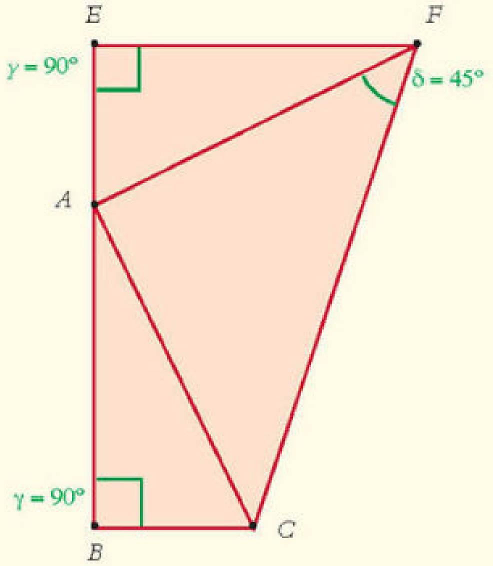


Fig. 1.21 Determina el criterio de congruencia.

Criterios de congruencia y semejanza de triángulos

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Figuras y cuerpos.

Actividad individual

Conocimientos previos

Vamos a recordar las propiedades de la suma de los ángulos internos de un triángulo y las propiedades de los ángulos entre paralelas.

¿Medir o calcular? Considera los siguientes triángulos (Fig. 1.22).

- Mide los ángulos internos faltantes.

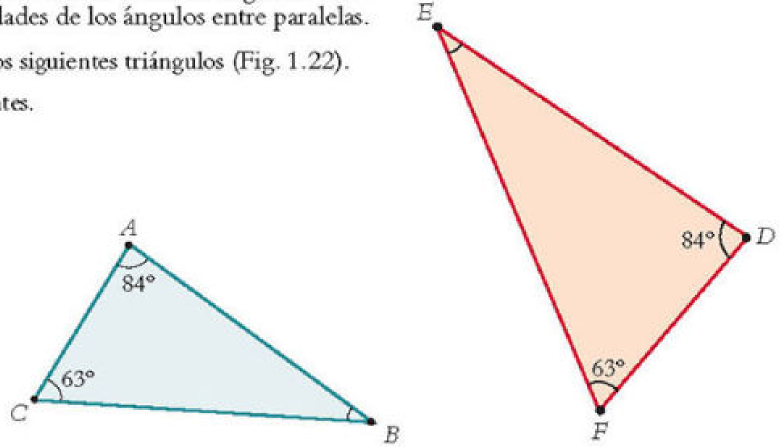


Fig. 1.22 Mide los ángulos internos de los triángulos.

Ahora que conoces la medida de los ángulos interiores de los triángulos, incluso considerando algún pequeño margen de error, puedes contestar:

- ¿Cómo es el ángulo ∡ CBA respecto del ángulo ∡ DEF?
- ¿Son iguales o diferentes? Coméntalo con otro estudiante.
- ¿A cuánto equivale la suma de los ángulos internos de un triángulo?

Luego, para los triángulos anteriores tendremos que:

$$\measuredangle\, CBA + \measuredangle\, BAC + \measuredangle\, ACB = 180°$$
$$\measuredangle\, DEF + \measuredangle\, FDE + \measuredangle\, EFD = 180°$$

Lo cual equivale a:

$$\measuredangle\, CBA + 84° + 63° = 180°$$
$$\measuredangle\, DEF + 84° + 63° = 180°$$

- Despeja la incógnita en cada una de las igualdades, como aprendiste en tus cursos anteriores.

Al simplificar, tenemos que:

$$\measuredangle\, CBA = 33° \text{ y } \measuredangle\, DEF = 33°$$

Este razonamiento, aplicado a cualquier par de triángulos ΔABC y ΔDEF, nos muestra que el ángulo $\measuredangle\, CBA$ será igual al ángulo $\measuredangle\, DEF$, siempre que cada uno de los ángulos restantes de ΔABC sea igual a otro de ΔDEF (Fig. 1.23).

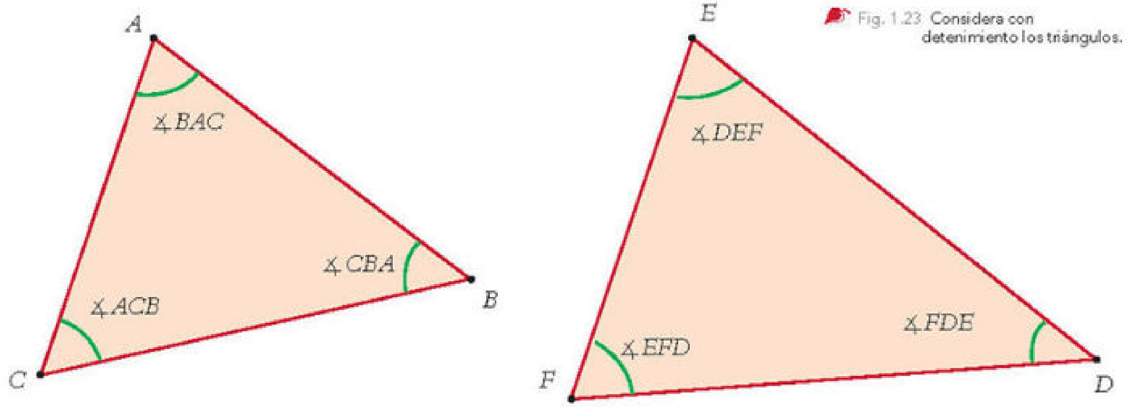


Fig. 1.23 Considera con detenimiento los triángulos.

- ¿Qué más podemos decir de los triángulos ΔABC y ΔDEF en el ejemplo anterior?
- ¿Tienen la misma forma y sus ángulos interiores la misma medida?
- Cuando estas condiciones se cumplen, ¿decimos que son semejantes?
- Discútelo con el resto del grupo y expresen su opinión a su profesor.

Dos triángulos son semejantes si los ángulos internos de uno son iguales a los del otro. Al resolver nuestro ejemplo y generalizarlo, obtuvimos nuestro primer criterio de semejanza:

Criterio AA: dados dos triángulos, si dos ángulos internos de uno son iguales a dos del otro, entonces son semejantes.

- Por lo visto, con menos datos podemos saber más, ¿de qué depende esto?

Hagamos otro ejemplo. Considera los triángulos ΔLMN y ΔPQR de la figura 1.24.

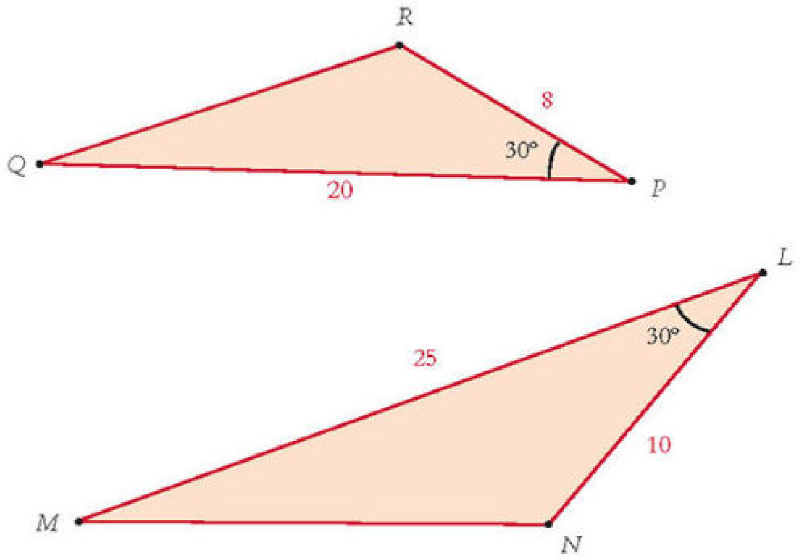


Fig. 1.24 ¿Los triángulos son semejantes entre sí?

- ¿Qué sabemos de estos triángulos?
- ¿Son semejantes entre sí? ¿Cómo podemos saberlo?
- Comenta tus respuestas con otros estudiantes y con tu profesor.

Una manera sería medir en cada uno de ellos el tercer lado faltante y comprobar si los triángulos cumplen con la definición de semejanza: *dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.*

También podríamos medir un ángulo correspondiente en cada uno de ellos (por ejemplo $\measuredangle PRQ$ y $\measuredangle MNL$), comprobar si son iguales entre sí y aplicar el criterio *AA*.

- Inténtalo y realiza como ejercicio en tu cuaderno las dos sugerencias; justifica por qué los dos triángulos son semejantes o no.
- Pero, ¿acaso no hay una forma más directa? Discútanlo en grupo y escriban sus conclusiones en el pizarrón con la asesoría de su docente.

Actividad individual

Observa nuevamente los triángulos de la figura 1.24.

- Sobre una hoja de papel dibuja ambos triángulos con las mismas características.
- Sobrepón los triángulos como se muestra en la figura 1.25.

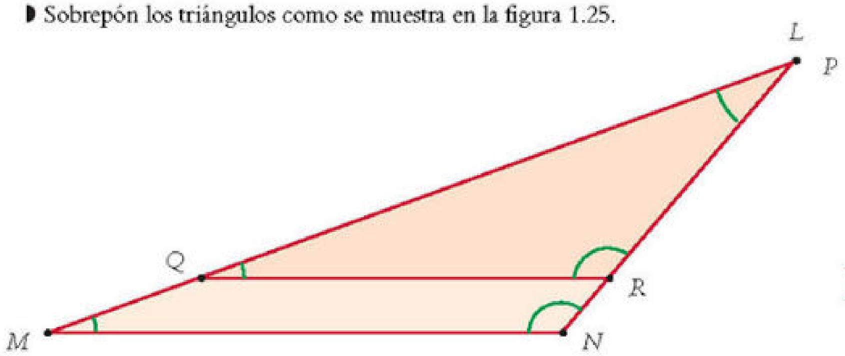


Fig. 1.25 Mismos triángulos de la figura 1.24, pero superpuestos.

- De acuerdo con tu dibujo, ¿los segmentos QR y MN son paralelos?
- Explica tu respuesta a otros estudiantes de tu grupo y escucha sus argumentos.
- Lleguen a una conclusión común y compártanla con su profesor.

Nuevos Conocimientos

A partir de las longitudes:

$$LM = 25$$
$$LN = 10$$
$$PQ = 20$$
$$PR = 8$$

Podemos calcular los cocientes:

$$\frac{LM}{PQ} = \frac{25}{20} = 1.25$$
$$\frac{LN}{PR} = \frac{10}{8} = 1.25$$

Estos cálculos nos indican que los segmentos LM, LN y PQ, PR, son proporcionales entre sí, es decir:

$$\frac{LM}{PQ} = \frac{LN}{PR}$$

Hagamos una pausa y recordemos la definición de triángulos semejantes: *dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.*

Esto nos dice que los triángulos ΔLMN y ΔPQR serán semejantes si ocurre:

$$\frac{LM}{PQ}=\frac{LN}{PR}=\frac{MN}{QR}$$

Retomando nuestro ejemplo (Fig. 1.25), sabemos que:

$$\frac{LM}{PQ}=\frac{LN}{PR}$$

Esto señala que los segmentos LM, LN y PQ, PR son proporcionales entre sí; con lo que estamos a un paso de probar que los dos triángulos son semejantes.

Para ello vamos a utilizar el *recíproco del teorema de Tales:* si una recta s corta al triángulo ΔPMN en los puntos Q y R, de forma que los segmentos PQ,QM y PR, RN sean proporcionales entre sí, es decir, que $\frac{PQ}{QM}=\frac{PR}{RN}$, entonces la recta s será paralela al segmento MN.

Por los datos del ejemplo (Fig.1.25), sabemos que:

$$\frac{PQ}{PM}=\frac{PR}{PN}$$

Por otra parte, tenemos (ver Fig.1.26):

$$PM = PQ + QM$$
$$PN = PR + RN$$

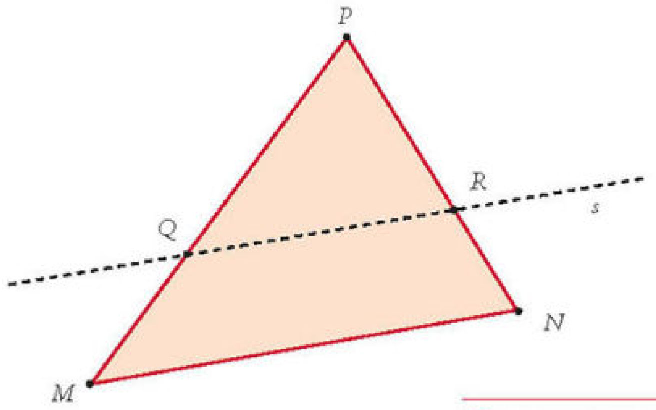


Fig. 1.26 Recíproco del teorema de Tales.

Si sustituimos las dos igualdades en la primera, vemos que:

$$\frac{PQ}{PQ+QM}=\frac{PR}{PR+RN}$$

De esta última igualdad (por despejes simples), obtenemos la siguiente:

$$\frac{PQ+QM}{PQ}=\frac{PR+RN}{PR}$$

Y ahora, en cuatro pasos veremos de qué manera la igualdad anterior nos conduce hasta obtener la igualdad del *recíproco del teorema de Tales:*

$$\frac{PQ}{PQ}+\frac{QM}{PQ}=\frac{PR}{PR}+\frac{RN}{PR}$$

$$1+\frac{QM}{PQ}=1+\frac{RN}{PR}$$

$$\frac{QM}{PQ}=\frac{RN}{PR}$$

$$\frac{PQ}{QM}=\frac{PR}{RN}$$

Podemos concluir que los segmentos MN y QR de nuestro ejemplo son paralelos.

Esto es muy conveniente, si aplicamos las propiedades de ángulos entre paralelas. A saber: *Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes (iguales).*

Por lo tanto $\measuredangle PQR = \measuredangle LMN$ y $\measuredangle QRP = \measuredangle MNL$ (Fig. 1.27).

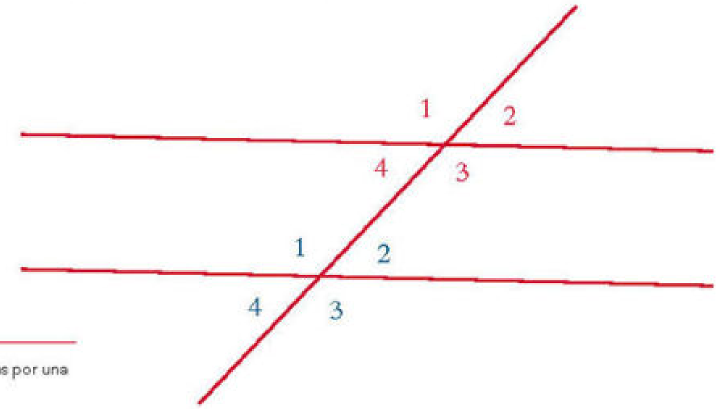


Fig. 1.27 Paralelas cortadas por una transversal.

Los números representan ángulos: a números iguales, ángulos iguales.

Y como $\measuredangle RPQ = \measuredangle NLM = 30°$, los ángulos internos de ΔLMN y ΔPQR son iguales entre sí, es decir: ambos triángulos resultan ser semejantes.

Actividad grupal

Consideren el ejemplo correspondiente a la figura 1.25. Enseguida respondan a lo siguiente:

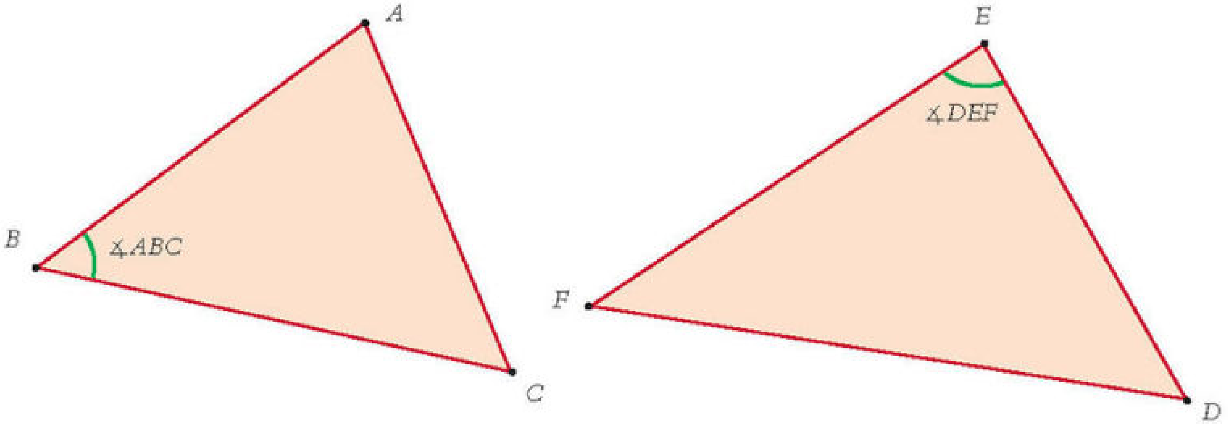
- Al inicio del problema, sabíamos que entre los dos triángulos había un ángulo igual: $\measuredangle RPQ = \measuredangle NLM$. Si su valor numérico fuera otro en vez de 30°, ¿los triángulos hubieran dejado de ser semejantes? Expliquen por qué.

- Las figuras son una ayuda muy importante para ver y comprender mejor lo que hacemos. Dibujen en su cuaderno sus propias figuras y cambien los nombres de los vértices.
- Finalmente, apoyándose en las figuras que dibujaron en su cuaderno, resuman las propiedades que vimos cuando resolvimos el ejemplo anterior.
- Escríbanlas en el pizarrón y esclarezcan las dudas que se presenten con el apoyo de su profesor.

Hemos visto en nuestro ejemplo que dos triángulos con un ángulo del mismo valor y dos lados de uno proporcionales a dos del otro, resultaron ser semejantes. Como habrás notado, el valor de dicho ángulo no fue relevante para elaborar nuestra conclusión, bastó con saber que era el mismo en ambos triángulos. Esto nos conduce a nuestro segundo criterio de semejanza:

Criterio LAL: dos triángulos son semejantes, si dos lados de uno son proporcionales a dos del otro y si los ángulos entre estos dos lados son iguales (Fig. 1.28).

Fig. 1.28 Criterio de congruencia LAL



Dicho de otro modo: Si $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ y $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Vamos a explorar un criterio similar al anterior. Considera dos triángulos ΔABC y ΔDEF con un par de lados proporcionales entre sí, cumpliéndose la igualdad (Fig. 1.29):

$$\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

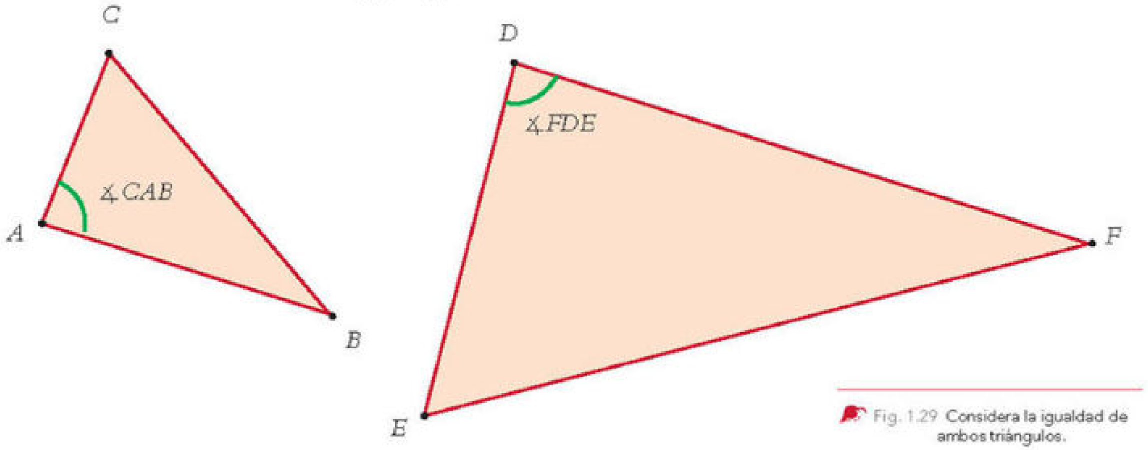


Fig. 1.29 Considera la igualdad de ambos triángulos.

- ¿Qué podemos decir de ambos triángulos?
- Supongamos que el ángulo $\measuredangle CAB \geq \measuredangle BCA$ y que $\measuredangle FDE \geq \measuredangle DEF$ (Fig. 1.29). Si ocurre que $\measuredangle CAB = \measuredangle FDE$, ¿podemos afirmar ahora que son semejantes?
- Comparen sus respuestas con las de otro estudiantes; comenten las diferencias y, si lo consideran necesario, soliciten la asesoría del maestro.

Actividad individual

De igual manera que en la figura 1.29, dibuja en tu cuaderno dos triángulos con las mismas características de la figura. Como no nos dan un valor numérico para los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle FDE$, y sí nos dicen que son iguales:

- Asígnales un valor idéntico, por ejemplo 90°.
- Ahora recórtalos y sobreponlos de tal forma que los vértices A y D coincidan.
- Si $AC \leq AB$ y $DE \leq AB$, entonces haremos coincidir el lado AC con el lado DE.
- Comprueba que el segmento BC es paralelo al segmento EF.

Esto será suficiente, pues las propiedades de ángulos entre paralelas justificarían que los dos triángulos sean semejantes. Dibuja en tu cuaderno la figura 1.30 y sigue paso a paso las siguientes instrucciones:

1. Sobre el lado EF traza un segmento de longitud BC, y haz que uno de sus extremos coincida con el vértice E.

Así obtenemos el segmento EB'.

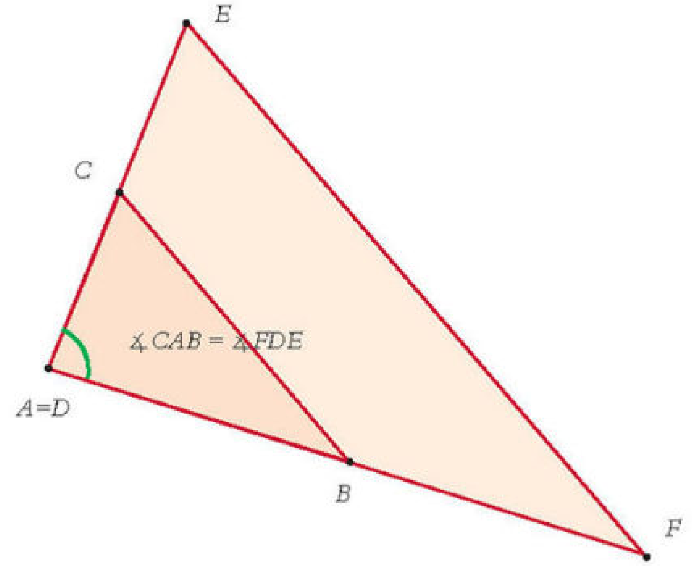


Fig. 1.30 Dibuja en tu cuaderno la figura.

2. Por el nuevo punto B', traza una recta s paralela al segmento AB, y sea A' su intersección con el lado DE. Observa que $\measuredangle EA'B' = \measuredangle CAB$.

- ¿Serán iguales los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'E$, o no? Observa qué pasa (Fig. 1.31).

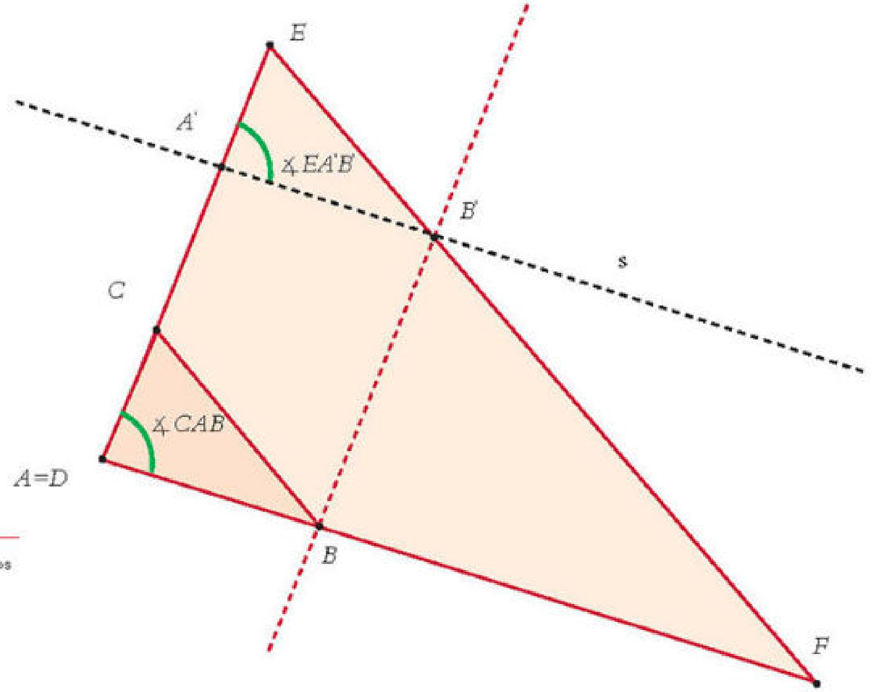


Fig. 1.31 ¿Son iguales los triángulos señalados?

La recta que pasa por los puntos B y B' es paralela al lado AE. ¿Por qué? De la proporcionalidad entre lados y dado que $BC = EB'$, tenemos:

$$\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{EB'}{EF}$$

De modo que los triángulos ΔDEF y $\Delta BB'F$ son semejantes y por los argumentos del *Criterio LAL*, los segmentos BB' y AE son paralelos.

Así el cuadrilátero $AA'B'B$ es un paralelogramo (los lados opuestos son paralelos) y por ello $AB=A'B'$.

Actividad individual

Dibuja una copia del triángulo $\Delta A'B'E$, de la siguiente forma:

- Haz coincidir el vértice A' sobre el vértice A, de modo que el lado $A'E$ esté sobre el lado AE (evidentemente el lado $A'B'$ quedará sobre el lado AF). Recuerda que $\measuredangle EA'B' = \measuredangle CAB$, $AB = A'B'$ y $BC = EB'$.

- ¿Qué sucede con los segmentos AC y $A'E$?, ¿son iguales?

La respuesta es sí, son iguales. De otro modo tendríamos rectas paralelas comportándose como si no lo fueran. Por lo tanto, los segmentos BC y EB' serán paralelos también. De donde concluimos que ΔABC y ΔDEF son semejantes.

En resumen, hemos obtenido nuestro tercer y último criterio de semejanza:

Criterio LLA: dos triángulos son semejantes, si dos lados de uno son proporcionales a dos lados del otro y si el mayor de los ángulos opuestos de uno es igual al mayor de los ángulos opuestos del otro.

Dicho de otra manera, los triángulos ΔABC y ΔDEF serán semejantes si los lados AB, BC y DF, EF son proporcionales y si $\measuredangle CAB = \measuredangle FDE$, donde $\measuredangle CAB \geq \measuredangle BCA$ y $\measuredangle FDE \geq \measuredangle DEF$.

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve el siguiente problema primero de manera individual; después, asóciate con otro estudiante para repasar sus procedimientos y resultados.

1. Un edificio proyecta una sombra que mide 8 m de largo (Fig. 1.32). Se sabe que la línea que va desde la punta de la sombra proyectada hasta el sol forma un ángulo de 30° con respecto del piso; y si a 1.5 m de distancia de donde termina la sombra del edificio se alza una vara vertical (apoyada en el piso) de 50 cm de alto cuyo extremo superior coincida con la línea mencionada:

   - ¿Cuál es la altura del edificio?

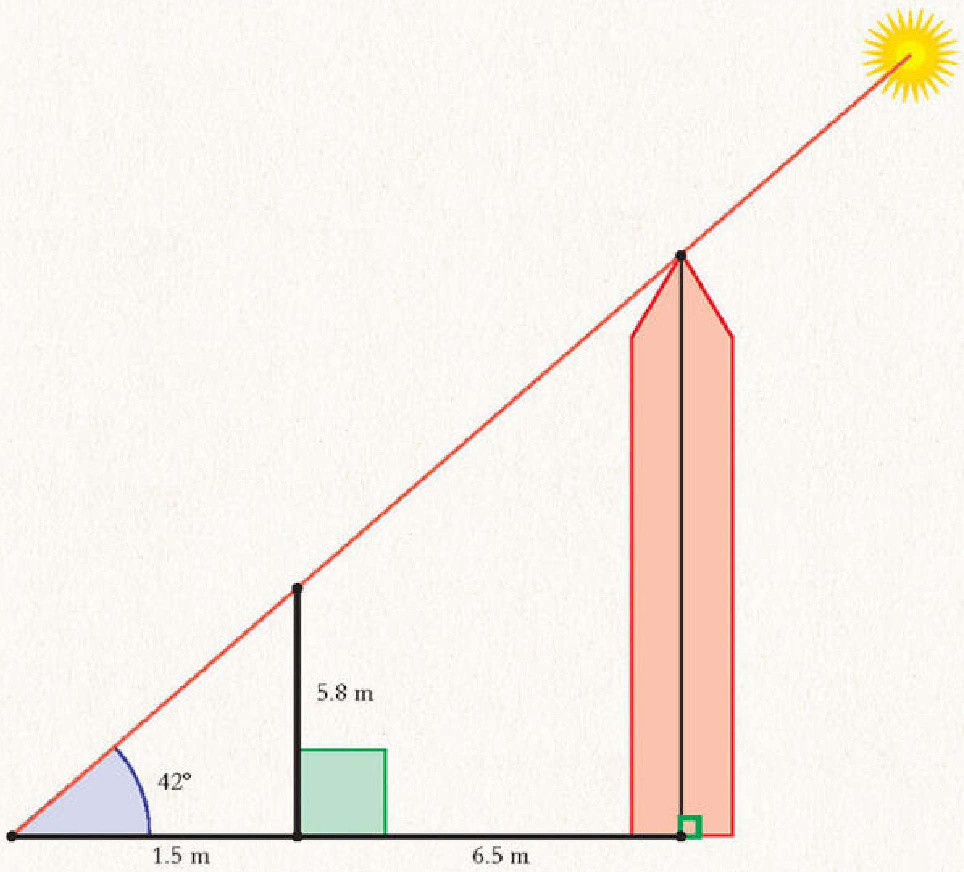


Fig. 1.32 El edificio proyecta una sombra de 8 m de largo.

- Reúnete con otro estudiante de tu grupo y comparen sus resultados; luego, describan el procedimiento que siguieron para llegar a la respuesta.
- Respalden su respuesta con argumentos y soliciten el apoyo de su docente para alcanzar conclusiones comunes. Compártanlas con el resto del grupo.

Representaciones de una misma situación

Eje: Manejo de la información.

Tema: Proporcionalidad y funciones.

Actividad en parejas

Conocimientos previos

Guillermo va a visitar a su familia que vive en el norte de la República Mexicana y tiene que manejar 800 km, mismos que piensa recorrer en 15 horas a una velocidad constante.

- Al cabo de 6 horas, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido?
- Cuanto más tiempo maneja, ¿qué sucede con los kilómetros?
- ¿Qué procedimiento utilizaste para responder las preguntas anteriores? Descríbelo.
- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten a escala grupal. Escriban las conclusiones en el pizarrón y asegúrense de que todos las comprendan. Soliciten apoyo a su docente si es necesario.

Actividad individual

A los 300 km de camino Guillermo le tiene que poner nuevamente gasolina a su automóvil, como conoce cuántos kilómetros le faltan por recorrer piensa que es conveniente saber cuál es el rendimiento del combustible. Para esto desarrolló una gráfica como la siguiente (Fig. 1.33):

Fig. 1.33 Relación entre la cantidad de litros y la distancia recorrida en kilómetros.

En el ejemplo anterior, cuantos más litros de gasolina se consuman, más distancia recorre un automóvil.

- ¿Cuál de las variables anteriores representa la **variable independiente** y cuál la **variable dependiente**? Explícalo.
- ¿Qué variable está en el eje de las abscisas?
- ¿Qué valor tiene la ordenada del punto cuya abscisa es 1?
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
- ¿Cómo representarías esta situación con una expresión algebraica?
- Mediante una dinámica grupal, escriban sus respuestas en el pizarrón y descarten aquellas que sean incorrectas no sin antes brindar argumentos.

Glosario

Variable independiente. Es la variable que puede cambiar su valor las veces que sea necesario, sin que su valor sea alterado por otra variable. Generalmente se le representa con la letra *x*.
Variable dependiente. Sus valores dependen de una función dada y los valores designados para la variable independiente. Se representa con la letra *y*.

Actividad en parejas

Observen detenidamente la figura 1.33 y, en parejas, respondan las siguientes preguntas:

- ¿Qué significa cada uno de los puntos que están sobre la recta?
- ¿Cuántos kilómetros rinde un litro de gasolina?
- Cuando aumentan los litros una unidad, ¿qué pasa con los kilómetros?
- ¿Cómo se le llama a este tipo de relación entre dos variables?
- ¿De qué otra manera pueden representar esta información?
- Comparen sus respuestas con otros estudiantes y describan el procedimiento seguido en cada respuesta.

Actividad individual

En la actividad las cantidades son litros de gasolina y kilómetros recorridos, como se señala en la figura 1.33.

Guillermo quiere saber cuántos kilómetros podrá recorrer con 6, 35, 48 y 60 litros de gasolina. ¡Ayúdale a completar la tabla 1.6!

Litros x	0	6	35	48	60
Distancia (km) y	0			480	

Tabla 1.6

- ¿Cómo puedes saber si existe una relación de proporcionalidad directa entre los litros de gasolina (x) y la distancia (y)?
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
- ¿Cuál de las siguientes expresiones $d = 5\,l$, $d = 10\,l$, $d = 20\,l$, corresponde a esta situación? Explica tu respuesta.

- Contrasta tus respuestas con las de otros estudiantes de tu grupo; discutan las diferencias aportando explicaciones y ejemplos.
- A escala grupal, escriban en el pizarrón las respuestas correctas tras haber discutido cada una; aporten nuevos ejemplos de relaciones de proporcionalidad directa y, con la asesoría del maestro, clarifiquen las dudas.

Sabías que...

Cuando encontramos la relación que existe entre dos variables, podemos calcular los valores de otra cantidad y representarlas de diferente manera, ya sea a través de una tabla de valores, en forma gráfica o mediante una expresión algebraica.

"A más velocidad corresponde menos tiempo".

Actividad en equipo

Guillermo maneja a una velocidad constante de 80 km/h y ha calculado llegar en 15 h a su destino final. Sin embargo recuerda que tiene un compromiso, por lo que tendrá que llegar antes. En equipo completen la tabla 1.7:

Velocidad (km/h)	80	100		150	
Tiempo (h)	15		10	8	7.5

Tabla 1.7

- ¿Qué sucede con la velocidad en relación con el tiempo?
- ¿Por qué sucede eso? Expliquen.
- ¿Qué tipo de proporcionalidad presenta esta situación? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuál es el valor que se queda constante?
- Compartan sus respuestas con otros equipos y defiendan con argumentos los procedimientos que siguieron para contestar.
- Lleguen a conclusiones comunes y compártanlas con el resto del grupo; mediante una dinámica dirigida por el docente, escriban sus conclusiones en el pizarrón.

Nuevos Conocimientos

Representación tabular

Una forma de representar la información de una situación o fenómeno es a través de una tabla de valores, como la tabla 1.6.

Una **tabla de valores** es, como su nombre lo indica, en donde se muestran algunos valores de la variable independiente x con los valores que le corresponden a la variable dependiente y.

Son utilizadas en ciencias como química y física para expresar una función, en donde un proceso que ha sido investigado previamente arroja una serie de datos los cuales se tabulan para, posteriormente, obtener conclusiones y tomar decisiones.

Para que dos variables x, y, sean directamente proporcionales se debe satisfacer la siguiente relación.

- Su **razón** $\frac{y}{x}$ es constante.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una de ellas la otra disminuye en la misma proporción.

- Se satisface la siguiente relación:

$$y = \frac{k}{x} \qquad x = \frac{k}{y}$$

Representación gráfica 1.34:

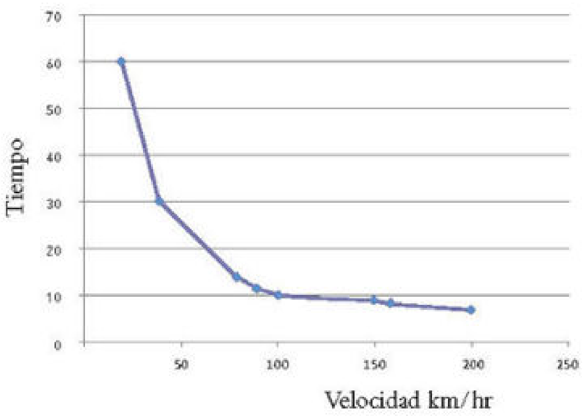


Fig. 1.34 Velocidad-Tiempo.

Recordemos que una representación gráfica a cada valor de x corresponde uno de y (300,4); (150,8); (80,15).

Las gráficas nos ayudan a ver la información rápidamente y proporcionan una información global de la situación.

Ya estudiaste en grados anteriores que si la relación entre dos variables es una **proporción directa**, la representación gráfica es una línea recta que parte del origen, esto es, que sus coordenadas son (0,0).

Existe una relación de proporcionalidad directa cuando al aumentar una variable, la otra aumenta en la misma proporción, o al disminuir una la otra también disminuye en la misma proporción.

Glosario

Tabla de valores. Una magnitud está en función de otra cuando el valor de la primera (variable dependiente) depende solamente del valor de la segunda (variable independiente). Esta última es función de la primera.

Glosario

Razón. Es una relación o comparación de dos cantidades. Se pueden escribir como fracción a/b, o $a{:}b$.

Recuerda

Constante de proporcionalidad.
En una relación de proporcionalidad entre dos variables, al multiplicar o dividir una de ellas por cualquier otro número, la otra variable se multiplica o divide por ese mismo número.

Glosario

Proporcionalidad directa. Se dice que dos o más variables tienen proporcionalidad directa cuando su razón permanece constante. Si una aumenta el doble la otra aumenta en la misma proporción.

La proporcionalidad directa es un caso específico de las variaciones lineales. Dos cantidades son *inversamente proporcionales* cuando al aumentar una de las magnitudes la otra disminuye en la misma proporción.

Expresiones algebraicas

Una situación también puede representarse a través de *expresiones algebraicas*, las cuales están formadas por coeficientes y variables dependientes e independientes.
Estas expresiones algebraicas sirven para identificar la relación de dependencia que existe entre las dos variables e indica qué operaciones tenemos que hacer con cada uno de los valores de x para obtener el valor correspondiente de y.

- En nuestro ejemplo anterior la expresión algebraica que representa esta situación es:

$$k = xy \quad \text{o} \quad x = \frac{k}{y} \quad \text{o} \quad y = \frac{k}{x}$$

Ejemplo: $(80 \times 15) = 1\,200$; $(100 \times 12) = 1\,200$; $(120 \times 10) = 1\,200$

Actividad individual

Identificada la expresión algebraica, en tu cuaderno elabora una tabla de valores y calcula el tiempo que tardará Guillermo en llegar si su velocidad es de 70, 60, 50 y 40 km/h respectivamente.

- Comparte tu tabla con algunos estudiantes del grupo; si encuentran diferencias, juntos repasen sus procedimientos hasta encontrar respuestas comunes.
- Bajo la asesoría del docente, expongan las respuestas correctas y clarifiquen las dudas.

Actividad en pareja

Anoten las siguientes expresiones algebraicas en su cuaderno, investiguen en su libro de física con qué concepto se relaciona cada una, así como el significado de cada literal. Señalen cuál es la variable dependiente y cuál la independiente; indiquen si guardan una relación de proporcionalidad directa o inversa y justifiquen esto último.

a) $F = m\,(a)$ b) $V = \frac{d}{t}$ c) $P = \frac{1}{d^n}$ d) $P = \frac{F}{A}$

- Compartan sus respuestas con otros estudiantes; con el apoyo del docente despejen las dudas que se presenten a escala grupal.

Ejercicios y aplicaciones

1. Reunidos en parejas construyan en su cuaderno una tabla de valores con los datos de la figura 1.35.

- Expliquen qué tipo de relación de proporcionalidad mantienen las variables y justifíquenlo ante otras parejas de estudiantes.

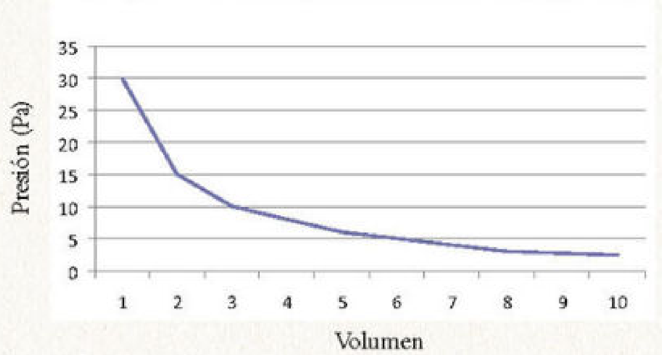


Fig. 1.35 Gráfica presión-volumen.

2. Con base en los datos de la figura 1.35 y la tabla que elaboraron, respondan en su cuaderno las siguientes preguntas:

- Si aumentan el volumen, ¿qué sucede con la presión?
- Si disminuyen la presión, ¿qué sucede con el volumen?
- Si a la presión la representan con la letra P, y al volumen con la letra V, ¿cuál sería la expresión algebraica que representa esta situación?
- ¿Qué sucedería con la presión si el volumen se triplica? Justifiquen su respuesta.

3. ¡Resuelvan lo siguiente!
México es uno de los principales países productores de petróleo en el mundo. La expresión algebraica que modela la cantidad de millones de barriles que produce diariamente es: $y = 2.5x$

De acuerdo con dicha expresión algebraica, completen la tabla 1.8.

Días	1	2	3	15	30	180	365
Barriles (millones)				37.5			

Tabla 1.8

Respondan las siguientes preguntas:

- ¿Qué significa la expresión algebraica $y = 2.5x$?
- ¿Cuál es la variable independiente?
- ¿Cuántos barriles anuales produce México?

- En sus cuadernos elaboren la gráfica correspondiente a la tabla 1.8 e indiquen qué relación existe entre las variables. Justifiquen sus respuestas ante el grupo.

4. Al estudiar una masa gaseosa se observa que $P = \frac{30}{V}$

Construyan una tabla de valores y calculen el valor de P para $V = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 10$ y 15.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta situación?

- Elaboren en su cuaderno la tabla utilizando los valores anteriores y preséntenla ante el grupo; expliquen el procedimiento seguido.

5. Un rectángulo tiene 10 cm de largo y 2.4 cm de ancho. Algunos otros rectángulos con otros valores de largo y de ancho cuentan con la misma área. Copien en su cuaderno la tabla 1.9, complétenla y tracen la gráfica.

Largo (cm)	1	2	3	4	6	8	10	12
Ancho (cm)				6			2.4	

Tabla 1.9

- Analicen la gráfica que obtuvieron y escriban sus conclusiones en el cuaderno.
- Encuentren cuál es la constante de proporcionalidad y verifiquen con una expresión algebraica si la variación es directa o inversamente proporcional.
- Contrasten sus respuestas con las de otros estudiantes y expliquen los procedimientos que siguieron; pidan asesoría a su profesor.

6. A una pecera se le vacían 12 litros de agua y alcanza una altura de 6 cm.

- ¿Qué altura alcanzará el agua cuando se le vacían 2, 4, 8, 15 y 20 litros?

- ¿Qué expresión algebraica les ayuda a calcular la altura del agua que alcanza la pecera cuando se le vacían los litros indicados?

- Elaboren una gráfica en su cuaderno y enseguida muéstrenla al grupo; a fin de clarificar las dudas, describan los procedimientos seguidos y juntos decidan cuáles son los correctos. Pidan la opinión de su docente.

Uso de las TIC

Patricia tiene que pagar $ 75 por utilizar internet 5 h.
Construyan una tabla de valores en una hoja electrónica y hagan la gráfica para los valores de 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8 y 12 h.
Pidan a su profesor que les ayude a obtener la gráfica.

Representación de relaciones de variación cuadrática en diversas situaciones y disciplinas

Eje: Manejo de la información.

Tema: Proporcionalidad y funciones.

Sabías que...

A través del tiempo el ser humano ha querido explicar se diversos fenómenos físicos y una de las herramientas que ha utilizado para hacerlo son las ecuaciones cuadráticas.

Alrededor de 1600 a.n.e., los babilónicos ya poseían el conocimiento para resolver ecuaciones cuadráticas, aunque no tenían una notación algebraica adecuada; este mismo conocimiento pasó a los egipcios, quienes usaron el método para demarcar sus parcelas; más tarde los griegos elaboraron métodos geométricos para obtener las soluciones, lo cual podemos hallar en la proposición 4 del libro II de los *Elementos de Euclides*.

Al parecer fue Diofanto de Alejandría quien le dio mayor importancia al tema.

Actividad en equipo

Conocimientos previos

En equipo resuelvan el siguiente problema y anoten sus respuestas en las líneas indicadas.

Martín quiere comprar un terreno cuya área sea de 800 m^2. El terreno es rectangular y su largo es dos veces más grande que su ancho.

- ¿Qué dimensiones tendrá el terreno? Expliquen cómo hicieron el cálculo.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta situación? Expliquenla.
- Comparen los resultados en grupo y establezcan el procedimiento correcto para resolver el problema; recurran al docente en caso necesario.

Actividad en parejas

Un pedazo de pasto sintético tiene un perímetro de 24 m. Luisa quiere aprovecharlo lo mejor posible optimizando su área.

En parejas respondan las siguientes preguntas y hagan los cálculos en su cuaderno.

- ¿Qué procedimiento utilizarían para calcular el área máxima que se puede formar? Descríbanlo paso a paso.
- ¿Necesariamente debe formarse un rectángulo? Justifiquen su respuesta.
- Si tuvieran que graficar el problema, ¿cómo sería la gráfica? ¿Cuáles serían las dos variables que relacionarían? Argumenten ante el grupo su respuesta.

Pistas

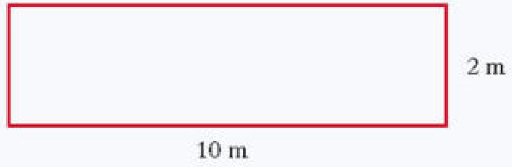
Las siguientes propuestas pueden ayudarles a resolver el problema.

- Identifiquen las variables que intervienen.
- Escriban en su cuaderno cómo se relacionan las variables.

- Contemplen que se habla de un rectángulo en el que el perímetro es constante, pero queremos saber cuál es el área más grande que se puede formar sin que cambie el valor del primero.

base × altura = ________ m^2 P=24 m

- Pueden ayudarse trazando en su cuaderno representaciones geométricas como la siguiente.



P= 24 m
A= 20 m^2

- La tabla 1.10 les puede servir para resolver el problema. ¡Complétenla!

Base (b)	Altura (h)	Perímetro = 24 m	Área m^2
x	$12 - x$	2( ) + 2( ) = 24 m	$(x)(12-x) = 12x-x^2$
1	11	2(1) + 2(11) = 24	11
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			

Tabla 1.10

- Grafiquen en su cuaderno el valor del Ancho X y el Área $12x - x^2$.
- Comparen sus respuestas con las de otros estudiantes; posteriormente, discutan las conclusiones en grupo con el apoyo del docente. Escríbanlas en el pizarrón para conocimiento del grupo.

Nuevos Conocimientos

En lecciones anteriores aprendimos que no todas las ecuaciones son lineales y que al graficarlas no todas corresponden a una recta. Así como las ecuaciones de primer grado tienen aplicaciones en distintos campos de la ciencia, las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas también permiten resolver situaciones de la vida diaria, ya que tienen aplicación en ingeniería, agronomía, física, química, economía, etcétera.

Actividad en parejas

Una granja de pollos se vio afectada por un virus que causó la muerte de las aves. El deceso diario de éstas está dado por $y = -t^2 + 16t + 80$.

La tabla 1.11 indica la relación entre el tiempo (t) en días y la muerte de los pollos (y), a partir del día que se descubrió la enfermedad. Observen la tabla:

Tiempo (días)	-4	0	4	8	12	16	20
Muertes (pollos)	0	80	128	144	128	80	0

Tabla 1.11

Respondan en su cuaderno las siguientes preguntas.

- El primer día de la enfermedad, ¿cuántos pollos murieron?
- ¿Cuántos días tardaron en controlar la enfermedad?
- ¿En qué día hubo las mismas muertes que el día que detectaron la enfermedad?
- ¿Quiere decir esto último que el virus no estaba controlado? Argumenten su respuesta.
- ¿En qué día hubo más muertes?
- Contrasten sus respuestas con las de otras parejas, discutan las diferencias y clarifiquen sus dudas con la asistencia de su docente.

Una función es la relación que existe entre dos magnitudes, misma que se puede mostrar a través de tablas, gráficas o expresiones algebraicas, siendo las dos primeras las que dan una visión mucho más amplia de su comportamiento, y así entender el cambio de algunos fenómenos.

En una relación funcional, el valor de la variable dependiente cambia de acuerdo con el valor de la variable independiente.

- ¿Estamos hablando de una función lineal? Argumenten su respuesta.
- ¿Cómo es la relación entre los días que pasan y la muerte de los pollos?
- ¿Qué significa el hecho de que haya un valor negativo? Expliquen.
- ¿Cómo sería la representación gráfica en el eje cartesiano? Justifiquen su respuesta con base en lo que observan en la tabla.
- Mediante una dinámica a escala grupal, y bajo la asesoría de su docente, construyan conclusiones comunes y escríbanlas en el pizarrón.

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve los siguientes problemas en forma individual; al terminar, compara tus respuestas con otro estudiante, describe tus procedimientos y presenta argumentos para defender tu trabajo. Busca asesoría de tu docente.

1. Una parcela mide 50 m de largo y 30 m de ancho. El dueño de ésta pretende ampliarla para poder aumentar sus cosechas. Tiene la oportunidad de comprar parte de los terrenos contiguos, y quiere que su parcela tenga una nueva área de 4 800 m². Desea conservar la forma rectangular de su terreno, para lo cual necesitará agregar a ambos lados la misma cantidad de metros.

   a) De manera individual, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

   - ¿Cuáles serán las nuevas dimensiones del terreno? ¿Cómo lo sabes?
   - ¿Qué expresión algebraica representa este problema? Escríbela.
   - ¿Qué dimensiones tendría el terreno si se quiere un área de 6 400 m²; 8 000 m²; 12 000 m² y 19 500 m²?

   b) Dibuja en tu cuaderno una tabla de valores para los datos anteriores y compártela con otros estudiantes; expliquen sus procedimientos.

2. Para que una empresa continúe funcionando es necesario que, como mínimo, cubra los costos fijos (CF). Si éstos están dados por la función $CF(x) = f(x) = x^2 - 6x + 11$, ¿cuál es el punto mínimo de esta función que corresponde al mínimo de costos fijos que se tiene que cubrir para seguir operando?

Recuerda.

El punto mínimo o vértice también se puede obtener con: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Glosario

Costos fijos. En economía los costos fijos son los que siempre hay que pagar, no importando si existe producción o no en una empresa. Normalmente se pagan semanal, quincenal, mensual, semestral o anualmente, tales como impuestos, renta del inmueble, teléfonos, luz, papelería, etcétera.

- Para ayudarte a resolver este problema, completa la tabla 1.12 y luego coméntala con otros estudiantes.

x	$f(x)$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Tabla 1.12

3. Una avioneta dejó caer costales de comida desde una altura de 300 m. La tabla 1.13 muestra algunos de los datos que se registraron. Completa los datos que faltan.

Tiempo (s)	Distancia de caída (m)	Altura a la que se encuentran los costales (m)
x	$12 - x$	$2(\ )\ 2(\ ) = 24\ m$
1	11	$2(1) + 2(11) = 24$
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Tabla 1.13

Responde en tu cuaderno:

- ¿Cuánto tiempo tardaron en caer los costales al suelo?
- De las siguientes expresiones algebraicas, ¿cuál corresponde a esta ecuación?

  $d = 6 + t$ $\qquad d = t^2 + 6$ $\qquad d = 6t^2$ $\qquad d = 6t^2 + 1$

- Compruébalo para valores de t = 10, 15 y 30 segundos.
- Compara tu trabajo con el de otros estudiantes y compártelo con tu docente.

4. La ganancia (G) por vender x unidades de camisas es $G = x(100 - 0.10x)$

- ¿Cuántas camisas deberán venderse para tener una ganancia de $12 750, $16 000, $21 000 y $25 000?
- Construye una tabla de valores y discútela con tus compañeros.

5. Al tirar una piedra a un pozo tarda 20 s en llegar al fondo.

- ¿Cuál es la profundidad del pozo? ¿Cómo lo sabes?
- Consideren que $y(t) = -\frac{1}{2}\, g \cdot t^2$. Elaboren una tabla de valores para 15 s, 30 s, 45 s y 60 s.

6. En una isla existen 80 ejemplares de **lémures**, y el ritmo de crecimiento de la población, en un tiempo determinado, está dada por la siguiente fórmula:

$$C(t) = -t^2 + 40t + 600$$

- ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a su crecimiento más alto? ¿Por qué?
- Elabora una tabla de valores para 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40 y 50 años y compártela con tus compañeros de grupo.

Glosario

Lémur. Género de mamíferos cuadrumanos, con los dientes incisivos de la mandíbula inferior inclinados hacia adelante y las uñas planas, menos la del índice de las extremidades torácicas y a veces la del medio de las abdominales, que son ganchudas; tienen la cola muy larga. Son frugívoros y propios de Madagascar.

Probabilidad. Eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes

Eje: Manejo de la información.

Tema: Nociones de probabilidad.

Actividad en parejas

Conocimientos previos

Durante los dos últimos años has estudiado la teoría de la probabilidad, en la que calculaste un número que muestra las posibilidades de ocurrencia de eventos y tiene que ver con el azar, pero no está de más recordar un poco ciertos conceptos que nos ayudarán en el desarrollo de esta lección. Contesten en parejas las siguientes preguntas:

- Cuando lanzas una moneda o un dado en repetidas ocasiones y siempre bajo las mismas condiciones iniciales, ¿arroja los mismos resultados siempre? ¿Por qué? ¿Cómo llamamos a este tipo de experimentos?
- Cuando lanzas una moneda al aire, ¿cuáles son los posibles resultados? Y si lanzaras un dado, ¿cuáles serían los posibles resultados? ¿Cómo llamamos a estos conjuntos de posibles resultados? ¿Cuál es el símbolo que los representa?
- ¿Cómo denominamos al hecho de obtener águila o sol luego de lanzar una moneda al aire? ¿Cómo llamamos al hecho de obtener algún número entre 1 y 6 luego de lanzar un dado?
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas; si encuentran diferencias, expongan sus argumentos (pueden consultar alguna enciclopedia para respaldar su opinión). Al final, escriban las respuestas correctas en el pizarrón con el apoyo de su docente.

Fig. 1.36 Volado.

Fig. 1.37 Lanzamiento de dados.

Un poco de Historia

El Caballero de Méré fue un filósofo y escritor que vivió durante el reinado de Luis XIV. En primer lugar, propuso lanzar un dado cuatro veces consecutivas y apostar que saldría por lo menos un seis; si el seis no saliese, entonces el oponente ganaría el juego.

En el segundo juego, de Méré propone lanzar dos dados 24 veces y apostar que la pareja de seis aparecería por lo menos una vez. Estos dos juegos son llamados problemas de Méré. Este caballero acudió con su amigo Blaise Pascal (1623-1662) y le planteó calcular la probabilidad de ganar en estos juegos.

Actividad en equipo

En equipos definan el espacio muestral de los siguientes experimentos y anótenlos en su cuaderno:

- Lanzar tres monedas (Fig. 1.38).

Fig. 1.38 Lanzar tres monedas.

- Extraer una pelota de una urna que contiene dos pelotas rojas, tres azules y dos verdes (Fig. 1.39).

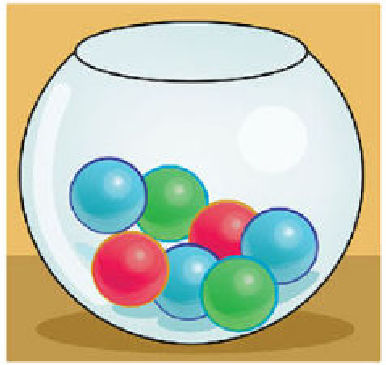


Fig. 1.39 Extraer una pelota.

- Lanzar dos dados (Fig. 1.40).

Fig. 1.40 Lanzamiento de dados.

- Mediante una dinámica a escala grupal, expongan sus respuestas y describan las operaciones que realizaron para llegar a ellas.
- Ante las diferencias expongan sus argumentos; al final, y bajo la asesoría de su docente, construyan conclusiones comunes.

Actividad individual

De manera individual contesta las preguntas:

- Si lanzas una moneda al aire en dos ocasiones, ¿el resultado de cada evento influye en el otro? Explica por qué. ¿Cómo llamamos a este tipo de eventos?
- Si lanzas una moneda al aire, ¿es posible que dé como resultado águila y sol al mismo tiempo? ¿Por qué? ¿Cómo llamamos a este tipo de eventos?
- Comparte tus respuestas con otros estudiantes y presenta tus argumentos; hagan partícipe a su docente para clarificar estos conceptos.

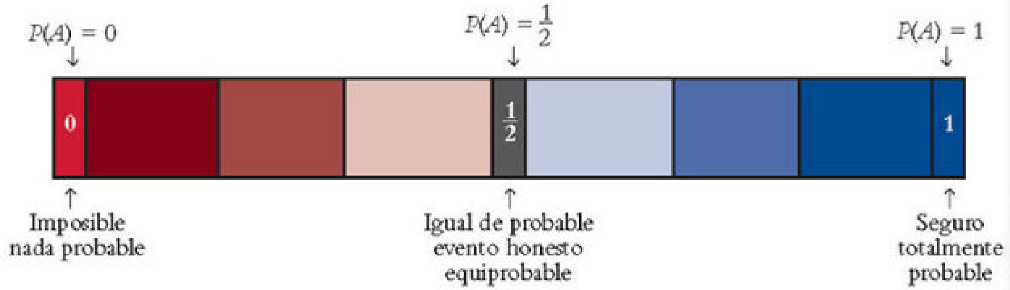
Actividad en parejas

En parejas realicen el siguiente experimento, anoten los resultados en su cuaderno. Al terminar discutan con el profesor lo obtenido.

Experimento: cada uno de los participantes lanza un dado en tres ocasiones.

- Definan el espacio muestral.
- Escriban los resultados que obtuvieron.
- ¿Son eventos independientes? ¿Por qué?
- ¿Son sus resultados mutuamente excluyentes? Argumenten su respuesta.
- Compartan sus respuestas con el resto del grupo y con su docente.

Rango de valores de las probabilidades: el estudio de las probabilidades de uno o varios eventos se miden dentro de un rango entre 0 y 1, ten cuidado de no representar alguna probabilidad negativa o mayor que uno, ya que sería un indicador de estar cometiendo algún error en los cálculos.



Probabilidad clásica: si A es un evento de un experimento, la probabilidad se calcula de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables en que puede ocurrir exitoso el evento } A}{\text{total de resultados posibles}}$$

Ejemplo: en el experimento de lanzar la moneda

a) Se define el evento A = *obtener águila*

b) El espacio muestral Ω = {*águila, sol*}

$$P(A) = \frac{\text{sólo hay un águila}}{\text{hay 2 posibles resultados}} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $P(A) = \frac{1}{2}$ o 0.5 que es un resultado honesto, es decir, es igual de probable que se obtenga águila como sol.

Actividad individual

Elabora en tu cuaderno el mismo procedimiento de lanzar uno y dos dados, calcula las siguientes probabilidades para cada experimento, sin olvidar definir el espacio muestral de cada uno:

- Obtener un seis.
- Obtener un número par.
- Obtener un número menor a cinco.
- Obtener un ocho.
- Coteja tus resultados con los de otros estudiantes, corrige si es necesario; a escala grupal, compartan sus respuestas bajo la asesoría del docente.

Fig. 1.41 Bolsa Mexicana de Valores.

Nuevos Conocimientos

Para calcular probabilidades de eventos que pueden resultar complejos es posible recurrir a una herramienta llamada *simulación*, en la que puedes realizar un experimento más sencillo o accesible, de modo que sea equivalente al experimento original.

Para estimar las probabilidades que se requieren es necesario repetir el experimento equivalente y calcular las frecuencias relativas que se desean analizar.

Al simular un problema ciertas situaciones probabilísticas se tornan más sencillas, ya que en la vida real es complicado controlar fenómenos como los movimientos de una acción en la Bolsa Mexicana de Valores (Fig. 1.41), el tiempo que tarda una persona en esperar para hacer el pago de algún servicio (Fig. 1.42), e incluso determinar si lloverá o no (ver figura 1.43).

Fig. 1.42 Pago de servicios.

Fig. 1.43 ¿Lloverá?

Sin embargo, es posible realizar una simulación para entender estos fenómenos y extraer las medidas que nos permitan tomar decisiones oportunas y convenientes.

Ejemplo:

Un agente de seguros sabe que cada vez que visita a un cliente tiene un 20 % (0.2 de probabilidad) de realizar una venta de un seguro de cobertura amplia para su auto, 30 % (0.3 de probabilidad) de venderle un seguro de media cobertura, es decir, que sólo ampara daños pero no hospitalizaciones para los accidentados; y un 40 % (0.4 de probabilidad) de vender un seguro básico, es decir, que sólo ampara a la persona que daña, y los gastos de su coche corren por su cuenta; y, finalmente 10 % (0.10 de probabilidad) de no vender nada.

Un día tiene en agenda a 5 personas. ¿Cuánto puede ganar si le pagan comisión por cada venta que realiza como se marca a continuación?

En este caso es posible realizar una simulación (ver Tabla 1.14).

Producto	Comisión
Seguro de cobertura amplia	$250.00 m.n.
Seguro de cobertura media	$180.00 m.n.
Seguro básico	$100.00 m.n.

Tabla 1.14

Actividad grupal

En equipos recorten diez trozos de papel del mismo tamaño y anoten en ellos los tipos de seguros que puede vender el agente, de la siguiente manera:

- Dos papeles de cobertura amplia, que representan el 20 %
- Tres papeles de cobertura media, que representan el 30 %
- Cuatro papeles de cobertura básica, que representan el 40 %
- Un papel de no tener ventas, que representan el 10 %

- Metan los papeles en una bolsa y hagan cinco extracciones, devolviendo el papel que van sacando para no alterar los porcentajes de probabilidad en cada extracción.
- Anoten en su cuaderno las posibles ganancias que tiene el agente con sus cinco citas.
- Comparen sus resultados con los demás equipos y discútanlos con el profesor. Escriban en el pizarrón las conclusiones.

Ejercicios y aplicaciones

Realiza una simulación para cada ejercicio y anota los resultados en tu cuaderno. Al terminar, compártelos con tu grupo y con tu docente.

1. Una fábrica de dulces produce normalmente paletas de tres sabores distintos, en una proporción de 20 % de fresa, 30 % de chocolate, 50 % de vainilla. ¿Cuál es la probabilidad de que al empacarlas al azar en caja de tres en tres, las tres paletas sean de un solo sabor?

2. Un estudiante responde un examen de 10 preguntas en las que debe contestar verdadero o falso, de las cuales sólo está seguro de las respuestas que dio en cinco preguntas, así que contesta al azar las cinco restantes. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos acredite con seis el examen?

3. Se lanzan cinco volados consecutivos, y se anotan los resultados. Calcula las siguientes probabilidades e indica si son eventos independientes o mutuamente excluyentes; no olvides definir el espacio muestral.
   - Obtener dos soles
   - Obtener águila en los cinco tiros
   - Pueden ocurrir los dos eventos anteriores
   - Un sol y cuatro águilas
   - Un águila y cuatro soles
   - Pueden ocurrir los dos eventos anteriores

Un reto matemático

Estima la probabilidad de que dos personas elegidas al azar en el salón de clases del tercer año con N alumnos, cumplan años el mismo día. Puedes simular el problema de la siguiente manera: en vez de anotar día y mes como 14 de octubre, puedes numerar los días del año así: 1 de enero = 1, y así hasta llegar al 31 de diciembre = 365.

Escribe en el pizarrón el cumpleaños de cada uno de tus compañeros, te sorprenderás que al hacer estas anotaciones, si N es igual o mayor a treinta alumnos, coincidirán al menos dos compañeros en el pizarrón, y no es magia, ya que la probabilidad aumenta mientras N es más grande. Podrás encontrar la probabilidad de los compañeros de tu salón al realizar esta simulación, sacando N veces una tarjeta con el número del día anotado y regresándola cada vez que realizas una extracción; así podrás calcular la probabilidad de tu salón.

Uso de las TIC

Laboratorio de computación

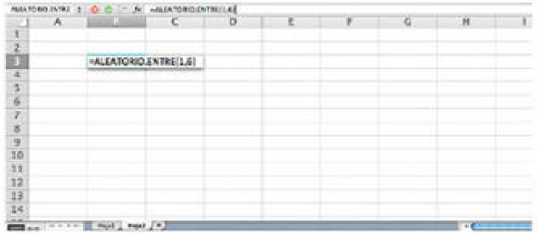
En esta sección pondremos en práctica los conocimientos adquiridos, ahora con ayuda de una hoja de cálculo.

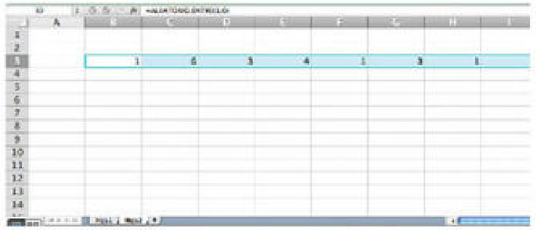
Traza la gráfica de frecuencias del lanzamiento de un dado en 100 ocasiones de modo que puedas ver que la probabilidad de obtener alguno de los seis números que tú elijas sea un sexto. ¡Manos a la obra!

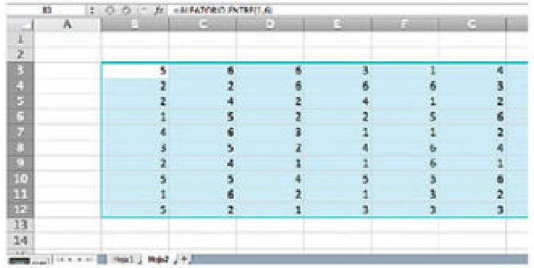
Abre una hoja de cálculo y posiciónate en la celda B3, introduce la función =ALEATORIO.ENTRE(1,6)

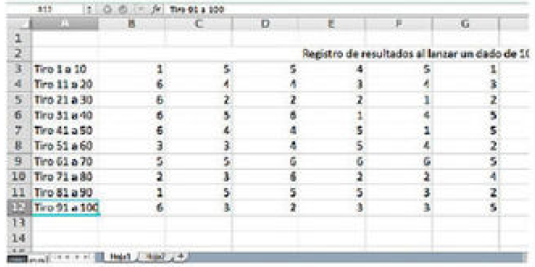
Esta función arrojará un número de manera aleatoria entre el 1 y el 6, ya que estamos pensando que se juega con un dado de seis lados. Posiciónate en la misma celda donde aparece tu resultado, en la esquina inferior derecha, hasta que el cursor obtenga una forma de cruz delgada, da un clic sin soltar y arrastra la selección hasta llegar a la columna K, verás que se copia la fórmula y, del mismo modo, aparecen resultados aleatorios entre 1 y 6.

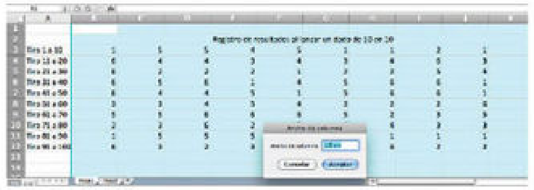
Repite el procedimiento para obtener resultados en los renglones siguientes como se muestra a continuación, hasta el renglón 12.

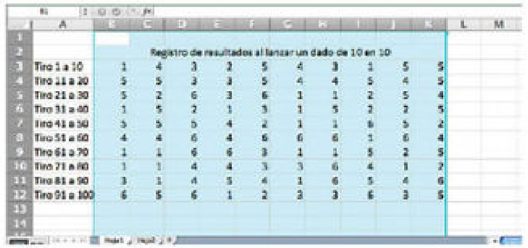




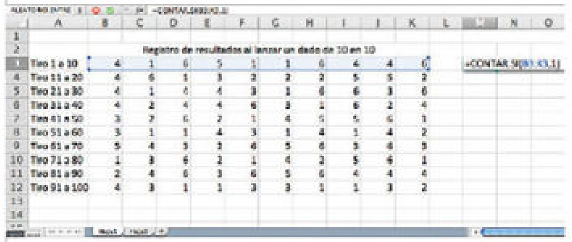


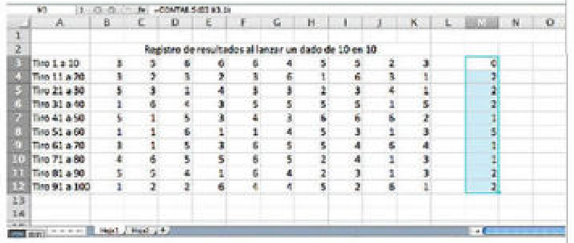


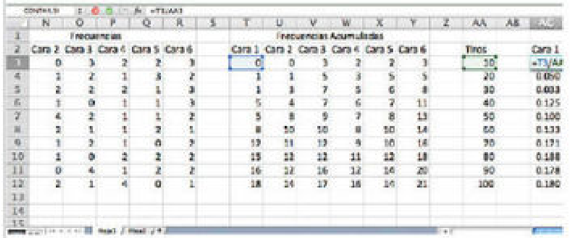


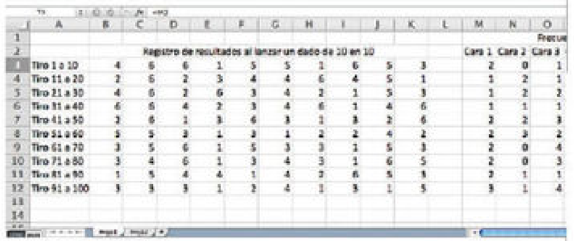


Uso de las TIC









Ahora pon nombre a cada columna para saber qué representa cada uno de los datos. Notarás que cada que modificas datos en la hoja, los números cambian, eso no es importante, ya que los números son aleatorios.

Haz las columnas más angostas para que sea más fácil la visualización de los datos, para ello selecciona las columnas donde hay números, después ajusta el ancho hasta que sea más compacta la tabla, arrastra el cursor desde la división de alguna de las columnas seleccionadas hasta el ancho deseado.

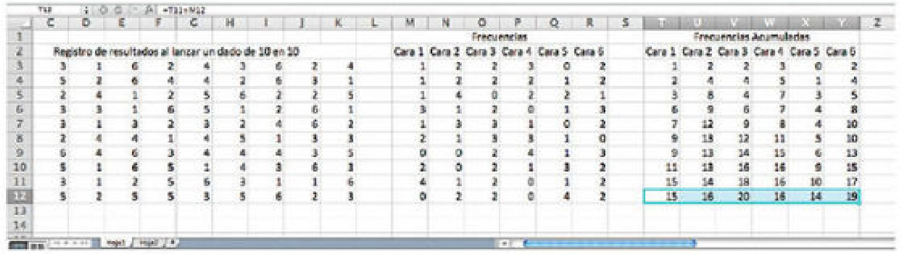
Para obtener las frecuencias de cada resultado, sin importar que cambien al hacer una modificación, en una nueva tabla, esto es, con la siguiente fórmula que debes introducir en la celda M3, = CONTAR.SI(B3:K3, 1), esta fórmula contará todos los números 1 que salgan en el primer renglón del Tiro 1 a 10. Repite esta fórmula para el número 2, 3, 4, 5 y 6, que sustituirás después de la coma de la fórmula donde aparece el 1.

Ya que termines de poner las seis fórmulas de manera horizontal, selecciona el renglón completo y corre la fórmula hacia abajo, como lo hiciste anteriormente.

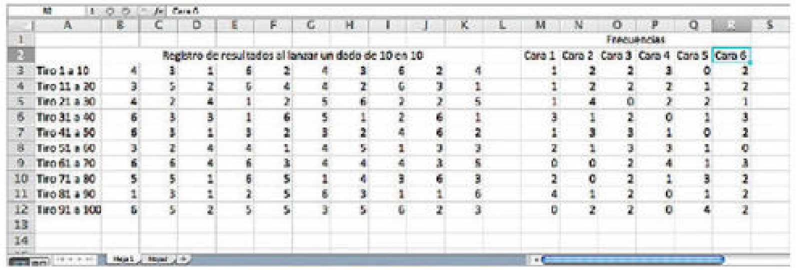
Nuevamente pon nombre a la nueva tabla con cada uno de los resultados obtenidos para no olvidar qué es lo que representa cada celda.

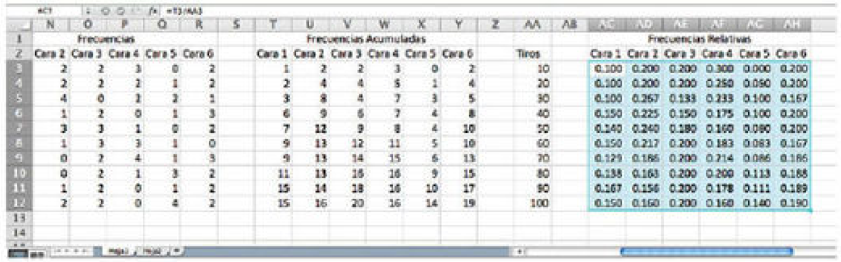
Acomoda las columnas de tamaño más angosto para visualizar mejor los resultados. En una nueva tabla obtén la frecuencia acumulada, que es la suma de los resultados por cada cara de los dados acumulando la suma conforme avanzas en cada celda, con la siguiente fórmula que posicionarás en la celda T4 =T3+M4, ya que en la celda T3 el resultado es exactamente el que se encuentra en el primer renglón de la Cara 1, con la siguiente fórmula =M3.

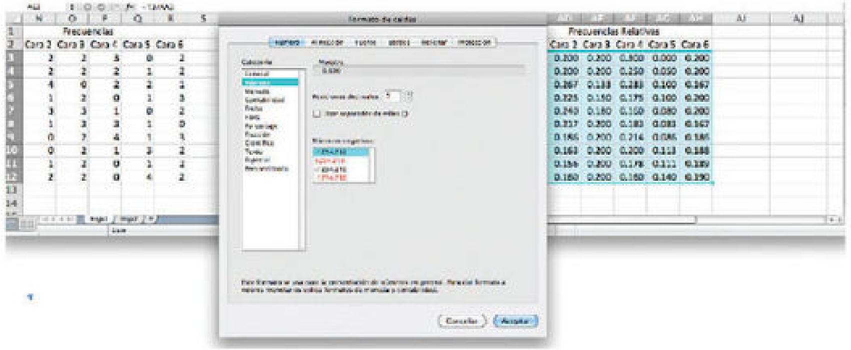
Uso de las TIC



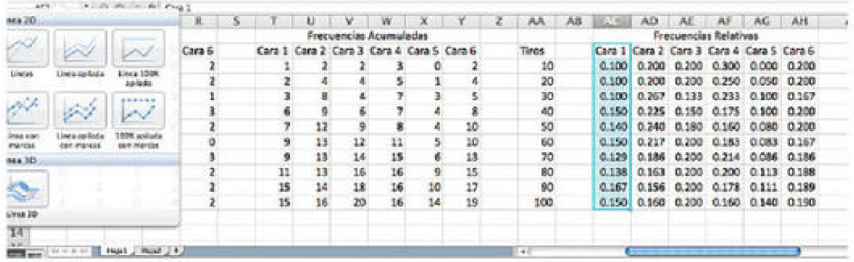
Ahora para obtener la suma, sólo corre la fórmula hasta la celda T12, y después hasta la columna Y, posteriormente escribe títulos a tu tabla y arréglala, como las otras. Si no confías en los resultados, puedes verificar que la suma acumulada del último renglón es igual a 100. Seleccionando el último renglón, notarás que en el borde inferior derecho de la hoja de cálculo, automáticamente calcula la suma de las celdas seleccionadas, así como el promedio y la cuenta de las mismas, así podrás cerciorarte que lo que has realizado hasta ahora es correcto.







Uso de las TIC



Coloca el número de tiros que harás en una nueva tabla para obtener la frecuencia relativa de los tiros, esto lo harás en la celda AA3 hacia abajo, es fácil, ya que previamente acomodaste los tiros de 10 en 10, así que podrás hacerlo directamente.

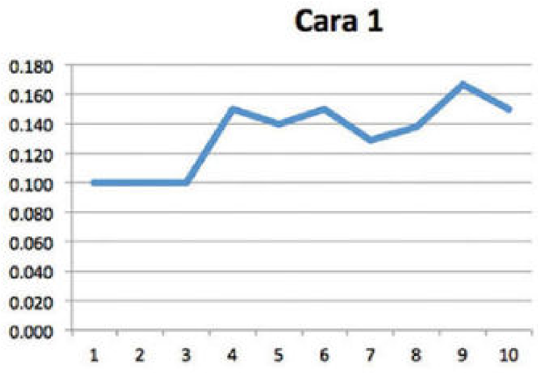
Al terminar calcula la frecuencia relativa dividiendo la acumulada de cada cara, entre el número de tiros que fuiste agrupando, con la siguiente fórmula ubicada en la celda: AC3 = T3/AA3. Repite el procedimiento para la cara, en el que la fórmula sería en la celda AD3 = U3/AA3, ya que son en el renglón del tiro número 10, que en el siguiente renglón deberá ser el AA4 por estar en el tiro 20, y así sucesivamente hasta llenar la tabla.

Notarás que la suma de cada renglón debe dar 1. Recuerdas, ¿qué significa esa probabilidad? Quiere decir que forzosamente debe caer una de las caras al lanzar el dado.

Puedes arreglar el formato de las celdas, dejándolas en décimos o en centésimos, según prefieras, esto se hace seleccionando los datos y posteriormente hacer clic derecho sobre la selección-formato-número, elige el número de lugares después del punto que prefieras.

Grafica cada una de las frecuencias relativas en un estilo de línea, para que veas el comportamiento de los datos y a qué probabilidad se acercan.

Podrás notar que la gráfica está muy cercana a 1/6, que es la probabilidad de obtener 1 al lanzar el dado, realiza las gráficas de las demás caras y verifica sus probabilidades.



Diseño de una encuesta, identificación de la población y muestreo

Eje: Manejo de la información.

Tema: Análisis y representación de datos.

Sabías que...

La estadística es una ciencia auxiliar para todas las ramas del saber. Su utilidad se entiende mejor si tenemos en cuenta que los quehaceres y decisiones diarias están relacionados con cierto grado de incertidumbre. La estadística trabaja con ella y nos orienta para tomar decisiones con un determinado grado de confianza.

Hubo un caso muy mencionado en las elecciones presidenciales de Estados Unidos recordado como un rotundo fracaso de la estadística debido a un error mortal al tomar los datos de análisis, que también se le conoce como muestra.

Se trata del error cometido por la Literary Digest que, en sus pronósticos para las elecciones presidenciales de 1936, afirmó que Franklin D. Roosevelt obtendría 161 votos electorales y Alfred Landon 370. La realidad mostró a Roosevelt con 523 votos y a Landon con 8 solamente. El error se debió a que la muestra fue tomada telefónicamente a partir de la lista de suscriptores de la Digest y, en 1936, las personas que se daban el lujo de tener teléfonos y suscripciones a revistas no configuraban una muestra que representara la diversidad de los votantes de Estados Unidos, por ende no podía hacerse un pronóstico confiable con información de un sector que favoreciera a un candidato más que al otro, obteniendo resultados equivocados para la realidad de la población respectiva en el año de 1936.

Actividad individual

En Río Frío, Estado de México, don Lauro se encarga de tener bien abastecidos los estanques de pesca de la trucha arcoíris, que es muy sabrosa y nutritiva. Se ha propuesto analizar la población total del estanque observando dos características, que son masa y talla del pez. Sabe que sería muy riesgoso y tardado tratar de obtener información de todos los peces del estanque uno por uno, porque podrían morir al intentar regresarlos al agua después de ser medidos y pesados.

Así que un domingo tuvo la idea de registrar los datos de las truchas que se pescaron ese día para realizar sus inferencias del total del estanque; los datos que obtuvo fueron los siguientes (Tabla 1.15).

Sabías que...

La piscicultura tiene por objeto el cultivo racional de los peces, particularmente el control de su crecimiento y su reproducción. Se practica en estanques naturales o artificiales, en donde se vigila y regula la multiplicación, alimentación y el crecimiento de las especies, así como el funcionamiento y mantenimiento de estos recintos acuosos en lugar de dejar a la naturaleza esta tarea. Para explotar el recurso de los peces en beneficio humano es necesario tener controlada la población de los que están listos para ser pescados y consumidos.

- Observa con atención:

Número	Masa (g)	Talla (cm)
1	2 758	52
2	2 436	57
3	1 811	59
4	732	29
5	2 371	56
6	1 527	60
7	2 420	58
8	949	38
9	1 301	59
10	2 185	52
11	2 088	52
12	1 037	41
13	780	31
14	2 556	57

Número	Masa (g)	Talla (cm)
23	1 213	49
24	2 703	52
25	769	31
26	1 971	56
27	1 211	48
28	1 990	52
29	1 482	54
30	2 279	58
31	1 158	46
32	1 091	44
33	2 311	60
34	2 027	54
35	852	34
36	1 971	55

Número	Masa (g)	Talla (cm)	Número	Masa (g)	Talla (cm)
15	1 678	50	37	2 470	51
16	2 482	57	38	794	32
17	1 060	42	39	2 284	55
18	1 757	50	40	1 458	52
19	718	29	41	1 989	50
20	1 204	48	42	1 596	57
21	2 883	60	43	1 095	44
22	2 239	59	44	1 876	58

Tabla 1.15

- Recuerda con tu profesor cómo obtener los datos estadísticos necesarios para llenar la tabla 1.16:

Estadísticos	Masa (g)	Talla (cm)
Media		
Mediana		
Moda		
Rango		

Tabla 1.16

Ahora ya tienes una idea de la población de peces del estanque, pero don Lauro sabe que puede tener esta información más clara, así que hizo la siguiente agrupación de datos (Tabla 1.17), los cuales son llamados estratos.

- Con base en el conocimiento adquirido en la lección anterior, completa:

Estratos de masa	Frecuencia	Frecuencia relativa	Porcentaje
1.- 700 g a 1 000 g	7	7 / total = 0.16	(Frecuencia relativa) x 100 = 16%
2.- 1 001 g a 1 500 g	11		___%
3.- 1 501 g a 2 000 g			___%
4.- 2 001 g a 2 500 g			___%
5.- 2 501 g a más			___%
TOTAL	44		___%

Tabla 1.17

Al llenar tus datos podrás ver que es posible representarlos gráficamente y así inferir sobre la población total del estanque (Figs. 1.44 – 1.46):

- Completa la siguiente gráfica de barras:

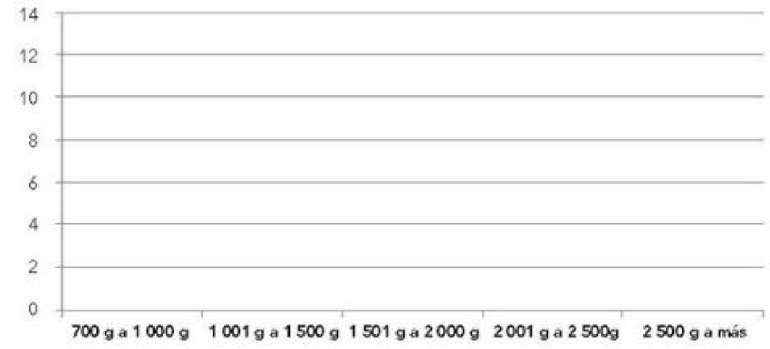


Fig. 1.44 Frecuencia.

- Completa la siguiente gráfica lineal de barras:

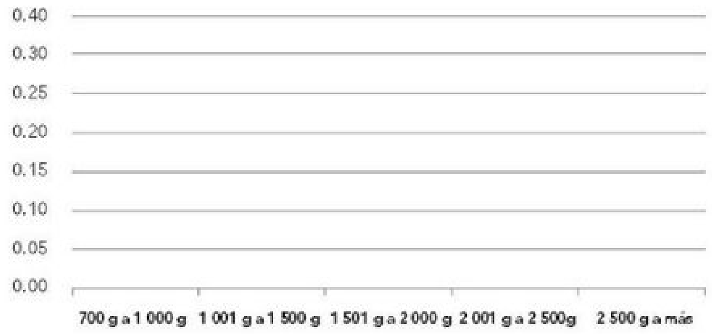


Fig. 1.45 Frecuencia relativa.

- Completa la siguiente gráfica circular.

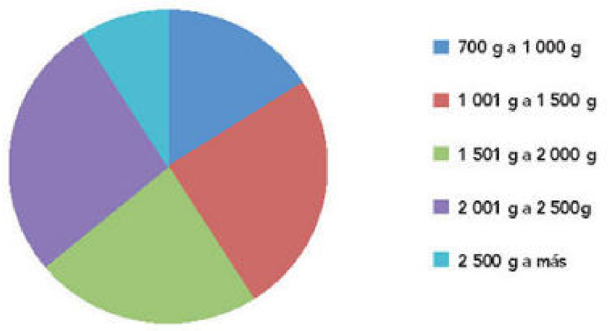


Fig. 1.46 Porcentaje.

- Compara tu trabajo con el de otros estudiantes y describe los procedimientos que seguiste; comenta las diferencias de opinión con tu docente a fin de clarificar las dudas ante el grupo.

Actividad en equipo

Con ayuda de las gráficas anteriores, don Lauro puede hacer inferencias sobre el total de la población. Contesten las siguientes preguntas:

- ¿Qué población predomina en el estanque?

- ¿Cuál es el porcentaje que representa esta población?

- ¿Cuál es la población más pequeña que habita el estanque?

- ¿Cuáles son los peces con mayor probabilidad de pescar?

- Contrasten sus respuestas con las de otros equipos y destaquen las coincidencias con el relato de los razonamientos utilizados para contestar; comenten también las diferencias y consulten a su docente para esclarecer las dudas.

Fig. 1.47 Don Lauro pescando.

Actividad individual

Ayuda a don Lauro (Fig. 1.47) a realizar el mismo análisis ahora con respecto a la talla.

- Anota lo necesario en tu cuaderno, elabora las gráficas correspondientes a la frecuencia, frecuencia relativa y porcentaje.
- Contesta las mismas preguntas que se hizo don Lauro de acuerdo con los resultados arrojados para la talla.
- Comparte tu trabajo con otros estudiantes y luego a escala grupal a fin de construir conclusiones comunes.

Como recordarás

La estadística engloba un conjunto de técnicas donde a partir de la observación de fenómenos, levantamiento y manejo de datos, es posible obtener conclusiones y ciertas predicciones útiles para la mejor toma de decisiones sobre el fenómeno estudiado e, incluso, para conocer mejor a la población relacionada con el estudio en cuestión.

Para ello es importante definir ciertos conceptos que nos ayudarán en el desarrollo de esta lección, así que ¡manos a la obra!

El muestreo es la técnica que se utiliza para levantar información de una **población** con el propósito de conformar una **muestra** que represente lo más fiel posible al total de esa población para obtener información general de ella.

Esta técnica es muy útil porque estudiar la cantidad total de una población muy grande es complicado y poco práctico, además de ser tardado y tedioso. Trabajar con un grupo pequeño de la población es más sencillo para aplicar técnicas que reflejen el comportamiento global, y brinden la posibilidad de inferir información sobre el total de la población (Fig. 1.48).

Glosario

Población. Es el conjunto total de personas u otro tipo de elementos que poseen ciertas características en común, de las cuales se obtendrá información deseada.

Muestra. Es el subconjunto de elementos seleccionados de una población, la cual se pretende estudiar para obtener información y hacer inferencias del total.

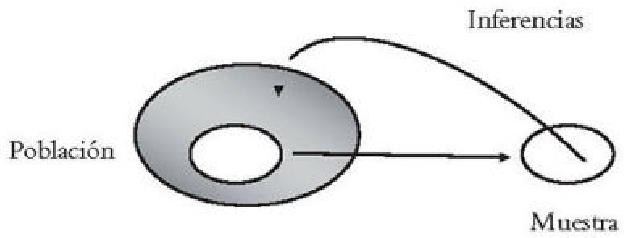


Fig. 1.48 Representación gráfica de muestreo.

Un reto matemático

¿Qué tanto conoces a tus compañeros de clase?

Entrevista a tus compañeros del salón con el siguiente cuestionario y elabora en tu cuaderno los estadísticos necesarios para poder hacer inferencias sobre todos los alumnos del mismo grado de tu escuela.

- ¿Qué edad tienes?
- ¿Cuál es tu género?
- ¿Cómo llegas a la escuela?

Será muy útil hacer lo siguiente:

- Define estratos para clasificar la edad.
- Clasifica el género de tus compañeros con números. Ejemplo: *femenino* = 1 y *masculino* = 2
- Anota las formas como llegan a la escuela y numéralas para que puedas definir estratos.

Evaluación

Resuelve los siguientes problemas de manera individual, pero puedes comentar con otros estudiantes los procedimientos que seguirás y revisar las lecciones necesarias antes de responder.

1. El cuadrado de un número más el número da como resultado 240.
¿Cuál es ese número? Explica por qué.

a) 12 b) 15 c) 25 d) 35

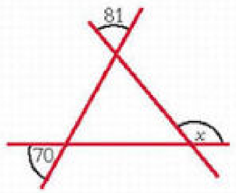
2. Analiza y responde:
El señor Becerril compró un terreno cuyo largo es el triple que su ancho y su área mide 1200 m^2. Lo utilizará para construir una sala de conferencias que tendrá un área de 800 m^2.

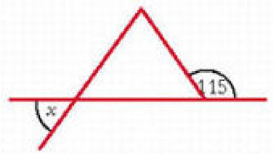
- ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? __________
- Dentro del terreno se piensa construir una cafetería cuyo ancho es el triple que su largo y ocupa un área de 75 m^2. ¿Cuáles serán las dimensiones de la cafetería? __________
- Junto a la cafetería se construirá un baño en forma cuadrangular de 5 m por lado. ¿Cuál será el área del baño? __________
- ¿Qué espacio quedará disponible para equipar la sala? __________
- ¿Qué operaciones deberás hacer para conocer el espacio disponible?

- ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa el área que ocupan la cafetería y el baño?
  a) $3x^2=105$ b) $3x^2+5x-100=0$ c) $3x^2=75$ d) $x^2 = 25$
- Si se reducen 100 m^2 a la sala de conferencias, ¿podrá construirse dentro del terreno un estacionamiento cuya área sea del doble de la cafetería? __________. Argumenta tu respuesta.

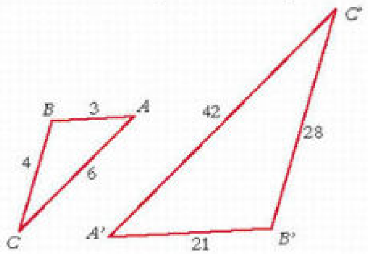
3. En las siguientes figuras determina el ángulo que se pide:

a) x = __________ b) x = __________





4. Determina si los siguientes triángulos son semejantes entre sí y argumenta por qué.

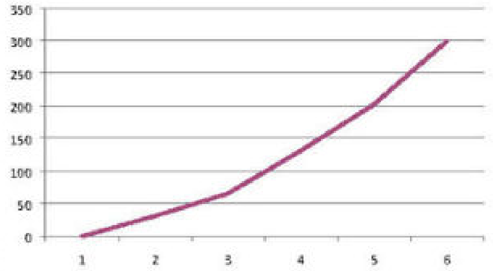


5. ¿Cuál de las siguientes situaciones corresponde a una relación de proporcionalidad directa?

a)

Tiempo (*hr*)	3	4	5	6
Distancia (*km*)	240	320	400	480

b)



6. Matías lanza una piedra verticalmente, la cual alcanza una altura máxima medida en metros en función del tiempo medido en segundos.
La función que modela esta situación es: $h(t)= -t^2+4t$

- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?
  a) 2 m b) 3 m c) 4 m d) 5 m
- ¿En cuánto tiempo logra alcanzar la altura máxima?
  a) 2 seg b) 3 seg c) 4 seg d) 5 seg

7. ¿Qué tanto conoces a tus profesores?
Entrevista ahora a tus profesores con el siguiente cuestionario y realiza los estadísticos necesarios para poder hacer inferencias sobre ellos.

- ¿Qué profesión tienes? ¿Qué edad tienes? ¿Género? ¿Cómo llegas a la escuela?

a) Puedes clasificarlos como área de *ciencias* = 1, y *sociales* = 2.
b) Realiza estratos para clasificar la edad.
c) Clasifica el género de tus profesores con números, como lo hiciste con tus compañeros.
d) Anota las formas como llegan a la escuela y numéralas para que puedas definir estratos.

8. Comparte tus respuestas con otros estudiantes y relata los procedimientos y razonamientos que seguiste para contestar. Bajo la asesoría del docente, validen los resultados ante el grupo.

BLOQUE II

Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

En este segundo bloque de tu tercer curso de matemáticas, aprenderás a utilizar ecuaciones cuadráticas, analizarás las propiedades de la rotación y traslación de figuras, construirás diseños que combinen la simetría axial y central, así como la rotación y traslación de figuras, explicarás y usarás el teorema de Pitágoras y calcularás la ocurrencia de eventos complementarios y mutuamente excluyentes.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Planeación del Profesor
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	2.1	8	
Forma espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	2.2	9	
		Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	2.3	10	
		Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	2.4	11	
	Medida	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	2.5	12	
Manejo de la información	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	2.6	13	

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tema: Patrones y ecuaciones.

Actividad en parejas

Conocimientos previos

En la lección 1.1 aprendiste a resolver problemas que daban lugar a ecuaciones cuadráticas utilizando métodos personales u operaciones inversas. En esta lección aprenderás a resolver problemas que impliquen el uso de este tipo de ecuaciones a través de la factorización. Un terreno de forma rectangular tiene un área de 780 m², si el ancho mide 4 m menos que su largo, ¿cuáles serán las dimensiones del terreno?

En parejas, respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se obtiene el área de un rectángulo?
- ¿Qué estrategia utilizaron para resolver el problema?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que usarían para calcular las dimensiones del terreno?
- Comparen sus respuestas con otras parejas y establezcan conclusiones comunes a escala grupal, bajo la asesoría del docente.

Actividad en equipo

¡Averigua qué número es!

El fin de semana Claudia y Paulina decidieron visitar el museo. La recepción, en donde hay que registrarse, tiene las siguientes dimensiones (Fig. 2.1).

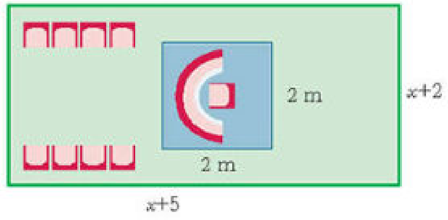


Fig. 2.1 Plano del museo.

Reflexiona con tu equipo y responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Qué área tiene el mostrador en donde se registra la gente?
- ¿Qué representa la x en el problema?
- ¿Cómo obtendrías el área coloreada de verde, de la recepción, como el producto de dos factores? Explica tu respuesta.
- ¿Qué procedimiento utilizaste para obtener los factores del área sombreada?
- Argumenten los procedimientos empleados a nivel grupal y con apoyo de su docente.

Pistas

Recuerda que en cursos anteriores estudiaste cálculo de áreas por descomposición, en donde separas las diferentes figuras geométricas y calculas el área de cada una de ellas (Figs. 2.2 y 2.3).

Para responder las preguntas anteriores dibuja la representación geométrica de cada una de las figuras que forman la recepción.

Escribe en tu cuaderno el área de cada una de las figuras y la ecuación que quedaría al restarle al área total de la recepción lo que corresponde al área del mostrador.

De las siguientes ecuaciones subraya la que es igual a la que tú obtuviste:

$(x+5)(x+2)$ $\quad$ $(x+5)(x+2) + 4$ $\quad$ $(x+5)(x+2) - 4$

Al simplificarla debe quedar una ecuación como la siguiente: $x^2 + 7x + 6$ que se refiere al área sombreada de la recepción.

Mostrador

Fig. 2.2 Cálculo de área por separación.

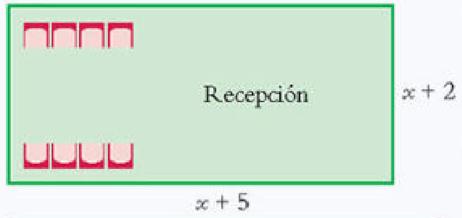


Fig. 2.3 Cálculo de área por separación.

En tu cuaderno dibuja la representación geométrica de la recepción y factoriza la nueva ecuación.

Ayúdate completando los siguientes paréntesis en los cuales debes escribir dos números cuyo producto sea 6 y sumados te den 7.

$$x^2 + 7x + 6 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Con ayuda del profesor discutan a escala grupal la diferencia entre las siguientes factorizaciones.

$(x + 2)(x + 5) - 4$ y $(x + 1)(x + 6)$

Nuevos Conocimientos

Otro procedimiento para resolver problemas que implican ecuaciones cuadráticas es la descomposición de factores o factorización, que consiste en encontrar los factores de una ecuación cuadrática, o bien, escribirla como un producto de otras expresiones. Es el proceso inverso de la multiplicación de polinomios (Fig. 2.4).

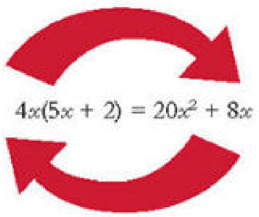


Fig. 2.4 Proceso inverso de la multiplicación de polinomios.

Es una herramienta que al igualar cada uno de los factores a cero, ayuda a obtener las soluciones que satisfacen el problema.

Recuerda que las ecuaciones cuadráticas completas tienen la siguiente forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La forma incompleta de las ecuaciones cuadráticas que podemos factorizar es del siguiente tipo:

$$ax^2 + bx = 0$$

Actividad individual

¡Resolvamos lo siguiente!

¿Cuánto pagarán Claudia y Paulina por entrar al museo si el precio del primer boleto multiplicado por el precio del segundo, que costaba $20 más, da como resultado 30 veces el precio del primero?

Para resolver este tipo de problema debes plantearlo en lenguaje algebraico y encontrar la ecuación adecuada. Puedes ayudarte consultando la lección 1.1 en donde se habla acerca del lenguaje algebraico y verbal.

$$x(x + 20) = 30x$$

- Justifica en tu cuaderno por qué esta ecuación modela la situación anterior. Para conocer el valor de x, debes quitar los paréntesis e igualarla a 0.

- Escribe sobre la línea como quedaría la ecuación:
- Una vez que los términos se encuentren del lado izquierdo debes reconocer a qué tipo de factorizacion corresponde la nueva ecuación.
- Cuando la ecuación corresponde a la forma $x^2 + bx = 0$, determina el MFC (máximo factor común).
- Completa los paréntesis para factorizar la ecuación anterior: $x(\_ - \_) = 0$
- Iguala cada uno de los factores a cero y despeja la variable, en este caso x.

Glosario

Máximo factor común. El máximo factor común de dos o más enteros es el que divide exactamente a cada entero, y el factor común de la variable es la que tiene la menor potencia.

$12x^3 + 24x^2 + 48x^4$; el factor común es $12x^2$

Responde sobre las líneas:

- ¿Cuáles son tus dos soluciones de la ecuación?
- Si en la ecuación sustituyes cada uno de los valores que obtuviste, ¿cuál de ellos es el que satisface el problema?
- ¿Por qué?
- ¿Cuánto cuesta el primer boleto?
- ¿Cuánto cuesta el segundo boleto?
- Contrasta tus respuestas con las de otros estudiantes; compartan los razonamientos que siguieron para responder las preguntas y, a escala grupal, establezcan en el pizarrón conclusiones comunes bajo la asesoría del docente.

Recuerda

Es importante considerar que no siempre ambos valores de la incógnita serán solución del problema. De la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$

Actividad en equipo

A una terraza cuadrangular se le aumentan ciertos metros de largo y se le quitan algunos metros de ancho. Si su nueva área vale $x^2 + 2x - 15$:

- ¿Cuáles son las nuevas dimensiones de la terraza? Expliquen en equipo cómo lo averiguaron y coméntenlo con otros equipos. (Fig. 2.5)

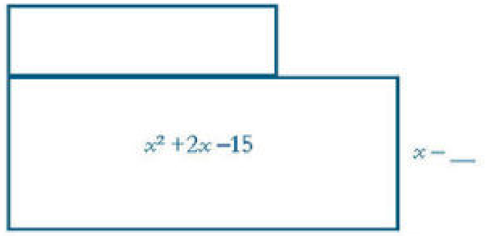


Fig. 2.5 ¿Cómo calcular las nuevas dimensiones de la terraza?

Sabías que...

La factorización te da la posibilidad de resolver ecuaciones de segundo grado, convirtiéndolas en dos ecuaciones lineales.
¿Será que se puede dividir un problema en partes más sencillas?

Para factorizar ecuaciones completas de la forma $x^2 + bx + c = 0$, se hace lo siguiente:

- La ecuación se iguala a 0:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

- Se dividen en dos factores:

$$(x \quad)(x \quad) = 0$$

- Se buscan dos números cuyo producto sea –15 y la suma o resta de éstos sea 2.

Reunidos en equipo contesten en su cuaderno lo que se pide:

- ¿Cuáles son esos números?
- Anoten los factores que resuelven dicha ecuación.
- Completen los factores que representan el área de la figura 2.5.
- Igualen cada uno de los factores a cero.
- Despejen la variable de cada uno de los factores.
- ¿Cuáles son los valores de x?
- ¿Cuál de esos valores es el que se usa para resolver el problema? Justifica tu respuesta.
- ¿Cómo puedes comprobar que los valores de x son los correctos?
- Con otro equipo lean sus respuestas y expliquen cómo llegaron a cada una; escuchen sus argumentos y, ante las divergencias, consulten al docente.

Actividad individual

Lee con atención los siguientes problemas y de cada uno de ellos anota en tu cuaderno lo que se pide:

- Escribe una ecuación que represente cada situación.
- Iguala la ecuación a cero.
- Simplifica la ecuación.
- Factoriza.
- Encuentra las soluciones.
- Justifica cuál de las soluciones es la que satisface la ecuación.

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve los siguientes problemas de manera individual; cuando hayas terminado, compara tus respuestas con otros estudiantes y expón tus razonamientos. Para alcanzar respuestas comunes, solicita apoyo del docente.

1. El área del siguiente rectángulo (Fig. 2.6) mide 340 cm².

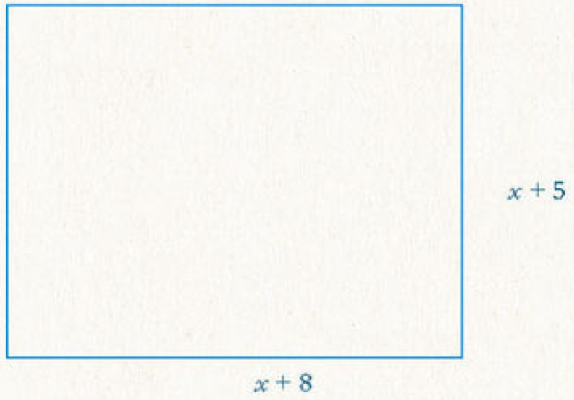


Fig. 2.6 ¿Cómo calcular las dimensiones del rectángulo?

- ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

2. El triple del cuadrado de un número es igual a 6 veces ese número. ¿Cuál es el número que satisface el problema?

3. La edad de Santiago, multiplicada por la de su hermano, que es 5 años mayor que él, da como resultado la edad de la mamá que es 32 años mayor que Santiago.

- ¿Cuál es la edad de Santiago?
- ¿Qué edad tiene el hermano?
- ¿Qué edad tenía la mamá cuando Santiago nació?

4. La altura de un triángulo es el doble de su base y su área es 81 cm².

- ¿Cuánto mide la altura?
- ¿Cuánto mide la base?

5. El cuadrado de un número más el doble del mismo da como resultado 168.

- ¿Cuál es el número?

6. Un cuadrado tiene cierta área, mientras que otro tiene el triple del área que el primero. Si entre las dos áreas suman 144 m^2.

- ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado pequeño?

7. Factoriza las siguientes ecuaciones en tu cuaderno:

a) $x^2-7x-30=0$

b) $x^2-4x-96=0$

c) $10x^2+15x=0$

d) $x^2-x-30=0$

e) $20x^3y^2+10xy-15x^2y=0$

f) $x^2-5x=300$

g) $21x^2-14x=0$

h) $x^2+6x=-3x+162$

8. En parejas, encuentren y anoten en su cuaderno la ecuación cuadrática que corresponde a cada una de las siguientes soluciones.

a) $x_1=-3$ $x_2=8$

b) $x_1=5$ $x_2=12$

c) $x_1=-4$ $x_2=-20$

d) $x_1=9$ $x_2=8$

e) $x_1=-15$ $x_2=-10$

f) $x_1=-2$ $x_2=10$

g) $x_1=30$ $x_2=-20$

h) $x_1=-12$ $x_2=15$

9. Mediante una dinámica a escala grupal, escriban en el pizarrón las respuestas, no sin antes comentar y discutir los procedimientos que siguieron; distingan, con ayuda de su docente, cuáles son los procedimientos más eficaces para llegar a respuestas correctas.

Lección 2.2

Rotación y traslación de figuras

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Figuras y cuerpos.

Actividad individual

Conocimientos previos

Todos sabemos lo que significa hacer girar las ruedas de un auto, cuando lo hacemos éste se pone en movimiento. Bueno, no completamente porque hay un punto que siempre permanece fijo, pero no se puede ver porque los puntos no tienen área.

- ¿Sabes a qué punto nos referimos?
- Discútelo con otros estudiantes y luego con el resto del grupo; atiendan las pautas del profesor.

Construye el siguiente dispositivo:

- En un plato de unicel marca con un plumón el centro y atraviésalo con un palillo.
- Luego divide el plato radialmente en ocho rebanadas que midan lo mismo (Fig. 2.7).
- En principio, los ángulos centrales deberán medir 45°.

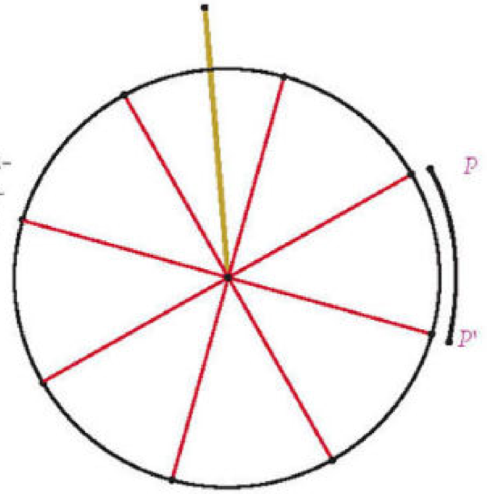


Fig. 2.7 ¿Recuerdas cómo dividir radialmente un círculo?

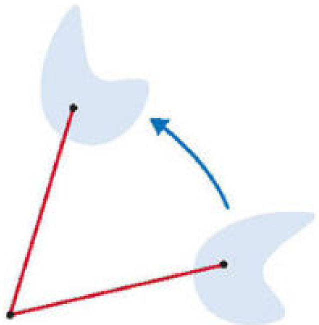
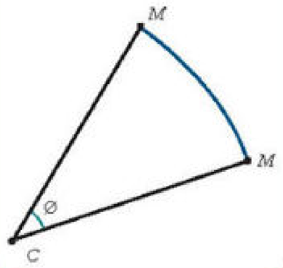


Fig. 2.8 ¿Cuál es el nombre de esta propiedad?

Glosario

Rotación. En el plano, la rotación con centro en C y ángulo $\varnothing$ es la transformación que deja C invariante (inmóvil) y que transforma todo punto M distinto de C en el punto M' tal que $\measuredangle MCM' = \varnothing$.



Haz girar el plato utilizando el palillo como eje, observa:

- ¿Qué le ocurre a todas las marcas?
- ¿Qué ocurre a la punta del palillo?
- ¿Qué nombre recibe esta interesante propiedad? (Fig. 2.8).

Vamos a utilizar el dispositivo del siguiente modo:

- En una hoja de papel pinta un punto C y apoya sobre éste la punta del palillo de madera.
- Luego pinta un punto P sobre la hoja de modo que esté lo más cercano a una de las marcas del borde del plato.
- Gira el plato 45° en sentido contrario a las manecillas del reloj y pinta un punto P' junto a la marca anterior.
- Así, P' es la imagen de la rotación de P con centro en C por 45°.

En geometría, una **rotación** en el plano es una transformación que gira las figuras en torno a un punto por un ángulo dado. Bajo esta circunstancia las figuras no se deforman porque las distancias se preservan, a esto se le llama *isometría*.

Actividad en parejas

En parejas, dibujen en su cuaderno un punto C y un punto M. Van a rotar $\varnothing = 35°$ al punto M tomando como centro a C. Para ello:

- Tracen el segmento CM y, apoyándose en él, midan con el trasportador un ángulo de 35° y tracen el segmento correspondiente.
- Finalmente midan la distancia CM y, en el nuevo segmento, marquen un punto M' tal que $CM' = CM$. Con esto construyeron M', la imagen M bajo la rotación indicada.

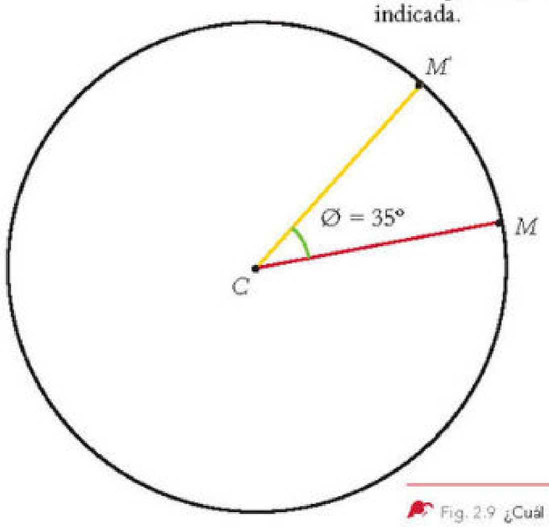


Fig. 2.9 ¿Cuál radio debes elegir?

Una forma alternativa consiste en lo siguiente:

- Tracen un círculo con centro en C y radio CM, luego tracen un radio que forme con CM un ángulo de 35°. El punto M' será el extremo del radio sobre la circunferencia.
- Observen que de los dos radios posibles deben elegir aquel que resulta al recorrer la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj (ver Fig. 2.9).
- Comparen sus dibujos y procedimientos con los realizados por otras parejas.
- Discutan a escala grupal el concepto de isometría y aporten ejemplos bajo la guía de su docente.

Actividad en equipo

En equipo dibujen en su cuaderno lo siguiente: un segmento AB y un punto C fuera del segmento (ver Fig. 2.10) y contesta:

- ¿Al rotar el segmento AB, la imagen que resulta tendrá una longitud distinta a la de AB? Expliquen su respuesta.

- Con centro en C, roten el segmento AB por los ángulos siguientes: 45°, 180° y 360°.
- Luego midan las longitudes de los segmentos de la imagen que resulte.
- Identifiquen en el dibujo la imagen de las rotaciones por 45°, 180° y 360° de un segmento AB.
- Agreguen los nombres que falten a los extremos de los segmentos correspondientes.
- Describan lo que ha ocurrido y expónganlo frente al grupo; realicen trazos en el pizarrón para mejor comprensión del grupo. Consulten al docente para esclarecer las dudas.

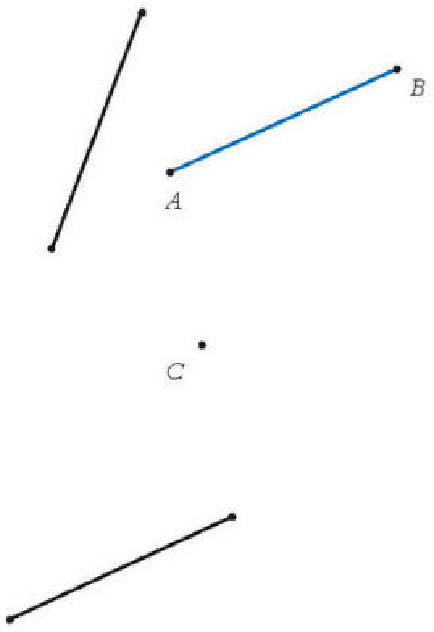


Fig. 2.10 Tracen en sus cuadernos la figura.

Nuevos Conocimientos

Veamos las propiedades más notorias de las rotaciones en el plano.

- *Propiedad 1.* La imagen de un segmento AB es un segmento $A'B'$ tal que: $|AB| = |A'B'|$.
- *Propiedad 2.* La imagen de un círculo C con centro en O y radio r es un círculo C' con centro en O' y del mismo radio r.

De las propiedades anteriores, se justifica la siguiente:

- *Propiedad 3.* La rotación conserva:
  - las longitudes;
  - los ángulos (la imagen de un ángulo es un ángulo de la misma amplitud);
  - las paralelas (las imágenes de dos rectas paralelas son dos rectas paralelas);
  - las áreas (la imagen de una figura es una figura de la misma área).

Actividad individual

Pongamos manos a la obra y comprobemos un poco de lo que nos habla la última propiedad: la imagen de una figura es una figura de la misma área. Resuelve en tu cuaderno lo siguiente:

- Dibuja un triángulo ΔLMN y un punto C fuera del triángulo (Fig. 2.11).
- Ahora, aplica a tu figura la rotación con centro en C, por un ángulo de 60°.

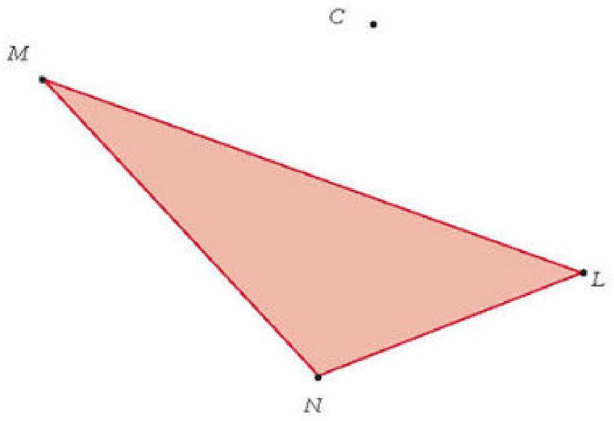


Fig. 2.11 Dibuja en tu cuaderno.

¡A medir!

- Mide los lados de tu triángulo ΔLMN y compara con los de la imagen resultante $\Delta L'M'N$. ¿Miden igual los lados correspondientes?
- Mide los ángulos internos de tu triángulo ΔLMN y compara con los de la imagen resultante $\Delta L'M'N$. ¿Miden igual los ángulos correspondientes?
- Calcula el área de tu triángulo ΔLMN y compárala con el área de la imagen resultante.
- Explica a otro estudiante lo que ocurre con las figuras trazadas: ¿has demostrado la propiedad del área? Explica por qué. Consulta a tu docente.

Dibuja dos rectas paralelas y un punto C fuera de ellas, rótalas por un ángulo de 90°. En tu cuaderno contesta:

- ¿Las rectas imagen son paralelas entre sí?
- ¿Qué ocurre si el punto C está en alguna de las dos rectas iniciales, las imágenes siguen siendo paralelas entre sí? Justifica tu respuesta.

Observemos que una rotación queda completamente determinada por un centro y la imagen de un punto. Considera los objetos de la figura 2.12:

- ¿Cuántas rotaciones hay que, con centro en C, transformen al punto M en el punto M'? Discútelo con otro estudiante; lleguen a una conclusión.

Sólo hay una respuesta: aquella que con centro en C rota el plano 35° en sentido contrario a las manecillas del reloj.

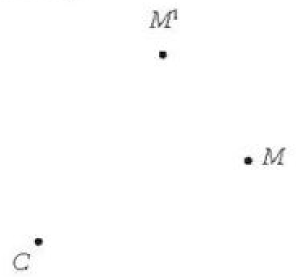


Fig. 2.12 Debe rotar en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Toca el turno de hablar sobre *traslaciones*. En matemáticas, una **traslación** es una transformación geométrica que corresponde a la idea intuitiva de "deslizar" un objeto, sin rotarlo, voltearlo o deformarlo (Fig. 2.13).

Glosario

Traslación. En geometría plana y espacial una traslación resulta en un desplazamiento de toda una figura sin cambiar la dirección, sentido y longitudes.

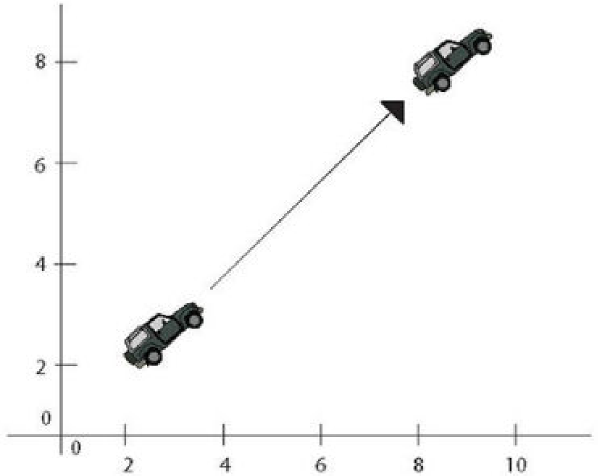


Fig. 2.13 Traslación.

Para determinar la imagen de una figura por una traslación es preciso una dirección y una longitud dada.

- La idea intuitiva es clara pero, ¿cómo referirnos a ello exactamente?

En el plano existe una infinidad de direcciones, tantas como rectas puedan partir desde un punto (Fig. 2.14).

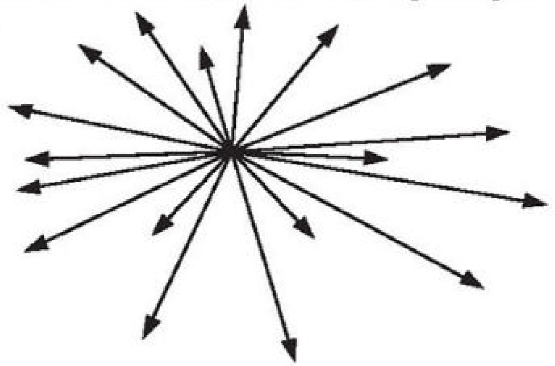


Fig. 2.14 Diversidad de direcciones.

Observa cómo una dirección en particular queda perfectamente determinada por una única recta dirigida, es decir, una recta recorrida en un determinado sentido.

A su vez (ver figura 2.15), si de esa recta sólo tomas una parte (es decir, una longitud dada), el segmento dirigido o vector que resulte aporta los datos que necesitas para definir una única traslación: dirección y longitud.

De momento, vas a considerar a todas las flechas o vectores con un punto inicial.

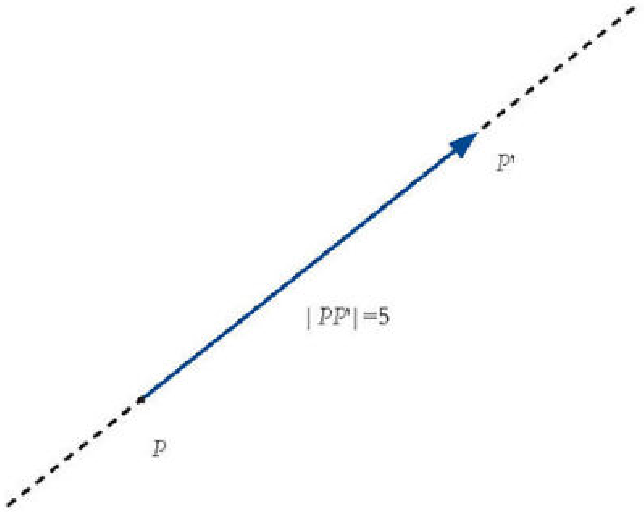


Fig. 2.15 Longitud dada.

Actividad en parejas

Observen en parejas el dibujo (Fig. 2.16), en él hay un punto C y una flecha o vector T.

- ¿Qué tienen que hacer si quieren aplicarle al punto la traslación indicada por ese vector? Discútanlo con otra pareja, consulten al docente.

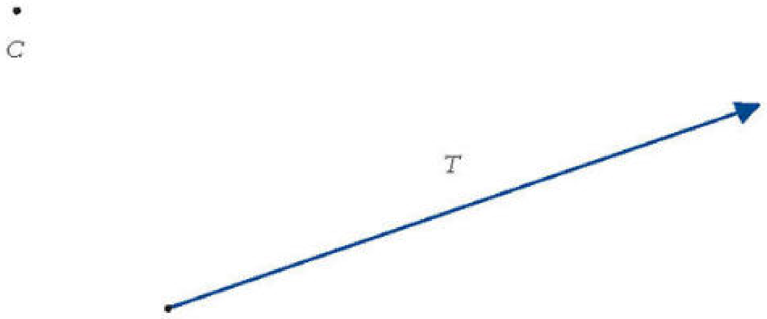


Fig. 2.16 ¿Cómo aplicar la traslación indicada?

Dibujen lo que se indica:

- Tracen una recta horizontal que pase por el punto inicial del vector T.
- Midan el ángulo que forma el vector con la recta horizontal, así como la longitud del mismo vector T (ver Fig. 2.17).

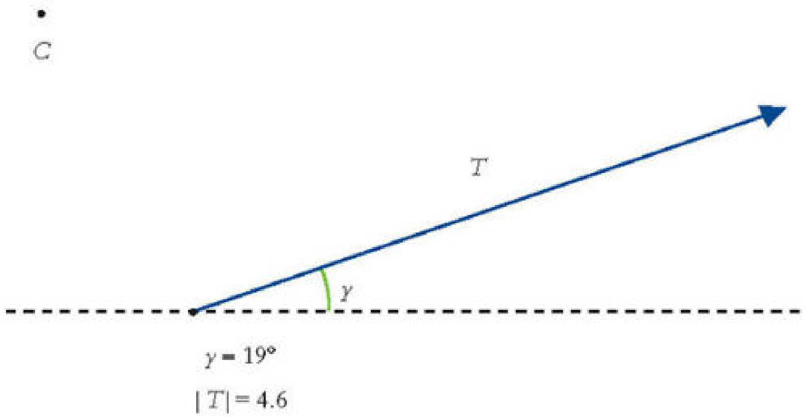


Fig. 2.17 ¿Cuánto mide el ángulo que forma el vector?

- Por último, construye una flecha con iguales características a las de T, pero cuyo punto inicial sea C.

Recuerda

Bajo una traslación se conservan: las longitudes y los ángulos. Por estas dos propiedades verás, por ejemplo, que una traslación transforma una recta en una recta paralela. ¿Qué sucede con las áreas de las figuras?

El punto final C' será la imagen de C bajo la traslación T (ver figura 2.18). Para ello:

- Tracen una recta horizontal por el punto C.
- Luego, apoyados en dicha recta, construyan el mismo ángulo $\gamma = 19°$.
- Finalmente, extiendan el lado del ángulo que es adyacente a la recta hasta que mida igual que a T.

Así, en el otro extremo tendrán a C': La imagen de C bajo la traslación T.

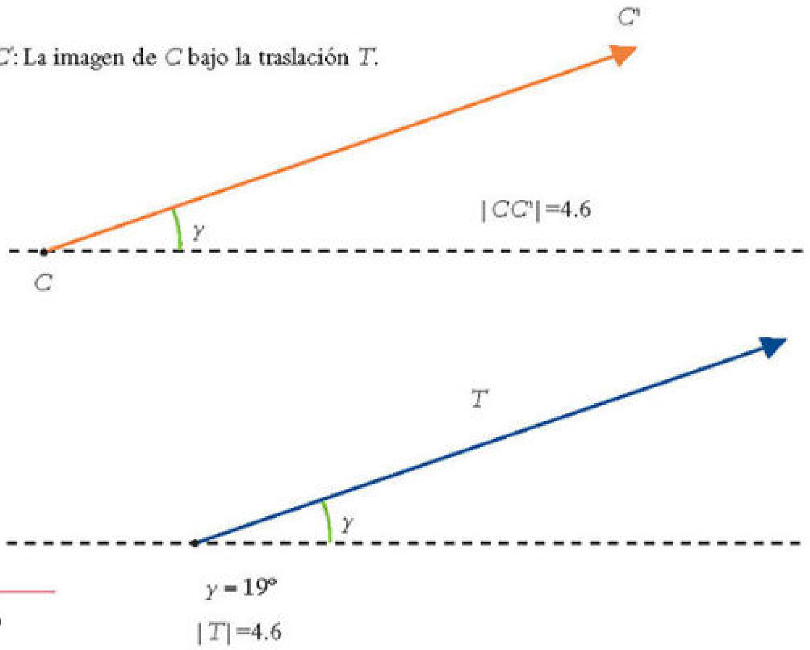


Fig. 2.18 C' es la imagen de C bajo la traslación T.

Ejercicios y aplicaciones

Practica lo que aprendiste y resuelve los siguientes ejercicios, primero de manera individual; al terminar, asóciate con otro estudiante y juntos repasen los procedimientos y razonamientos seguidos en cada caso.

1. Dibuja en tu cuaderno un segmento y rótalo con respecto a uno de sus extremos. Si unes el segmento original y su imagen:

- ¿Qué resulta?
- ¿Qué longitud tendrá? Responde en tu cuaderno.

2. Dibuja en tu cuaderno un triángulo equilátero y distingue uno de sus vértices (llamémosle *C*); ahora, con respecto a *C*, rota el triángulo 45°, luego a la imagen resultante rótala 45° con respecto a *C*, y repite esto cuatro veces más.

- En total, ¿cuántas rotaciones realizaste?
- ¿Cuál es la figura que se genera al final? Responde en tu cuaderno.

3. Dibuja en tu cuaderno una flecha de 5 cm de longitud, luego haz un dibujo de tu elección y aplícale la traslación representada por la flecha que dibujaste.

- Compara tu dibujo con el de otros estudiantes.

4. Apoyados por su docente, organicen una dinámica a escala grupal: revisen los procedimientos seguidos en cada ejercicio, esclarezcan las dudas y arriben a conclusiones comunes.

Diseños que combinan las simetrías axial y central, la rotación y la traslación de figuras

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Figuras y cuerpos.

Actividad en parejas

Conocimientos previos

En parejas, observen las siguientes imágenes (Fig. 2.19):

Fig. 2.19 Técnica de papel picado.

Estas figuras tradicionales están hechas de papel picado y tienen algo en su diseño que las hace muy agradables a la vista.

- Poseen colores, trazos y formas, ¡pero hay más! ¿Qué puede ser?
- Comenta con tu compañero de trabajo.

Observen detalladamente una de ellas (Fig. 2.20). Como pista hemos añadido a la figura un eje vertical de color rojo.

- ¿Qué observan? Escriban su respuesta en su cuaderno.

Eje L

Fig. 2.20 ¿Cómo se relaciona la simetría axial con la técnica de picado de papel?

El eje L divide la figura en dos mitades, con la propiedad de que cada mitad es una copia de la otra pero vista como un reflejo, ¡y justo el eje L es el espejo!

- ¿Cómo llamamos a esta disposición? ¿Dónde podemos reconocerla?
- ¿Podrían mencionar algunos ejemplos provenientes de la naturaleza?
- Compartan sus respuestas con el resto del grupo y con su docente.

Actividad individual

Pon atención a las siguientes figuras (Figs. 2.21 – 2.26): en la naturaleza difícilmente podrás ver trazos exactos como líneas rectas o ángulos de 90°; no obstante, en sus proporciones subyace una serie de patrones sorprendentes.

- Observa las simetrías de las imágenes, sería interesante estudiar esos patrones, mejor aún aprender a construirlos. ¿Qué tipos de simetría existen? Investígalo.

Fig. 2.21 Mariposa azul o *morpho*.

Fig. 2.22 Girasol.

Fig. 2.23 Paisaje y su reflejo en un lago.

Fig. 2.24 Flor del sol (Helianthus annuus).

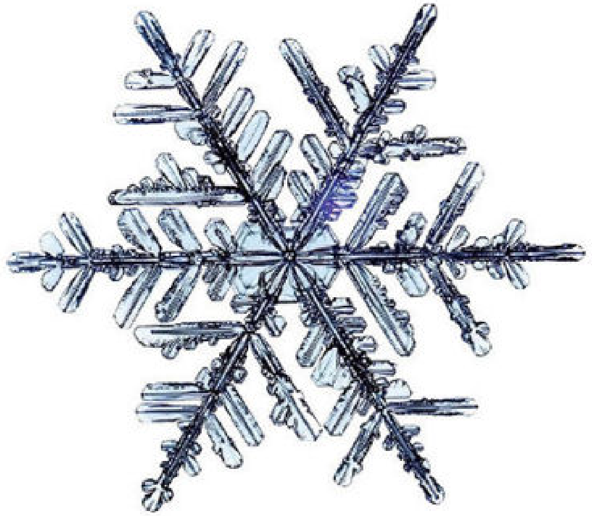


Fig. 2.25 Copo de nieve.

Fig. 2.26 Mitad de manzana.

En el plano euclidiano existen distintos tipos de simetrías, dos de las más importantes son la *simetría axial* y la **simetría central**.

Si comprendemos el concepto de simetría en el plano, será más simple generalizarlo y entenderlo en dimensiones superiores como el espacio.

Glosario

Simetría central. Se presenta cuando una figura tiene otra figura que le corresponde, a la misma distancia de un punto central; pero orientada en dirección opuesta.

Actividad individual

Trabaja de manera individual. En la siguiente imagen (Fig. 2.27) tenemos un punto A y una recta o eje L.

- Reprodúcelo en tu cuaderno.

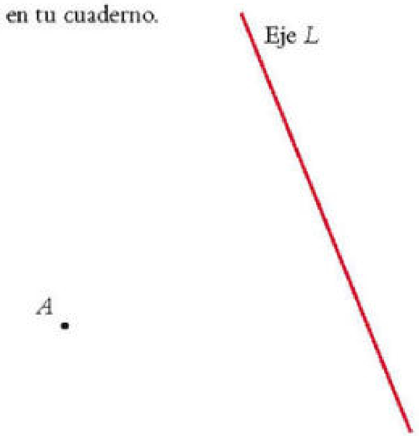


Fig. 2.27 Dibuja en tu cuaderno.

- Ahora traza una recta perpendicular a L que pase por A. Marca el punto P de intersección entre ambas rectas (Fig. 2.28).

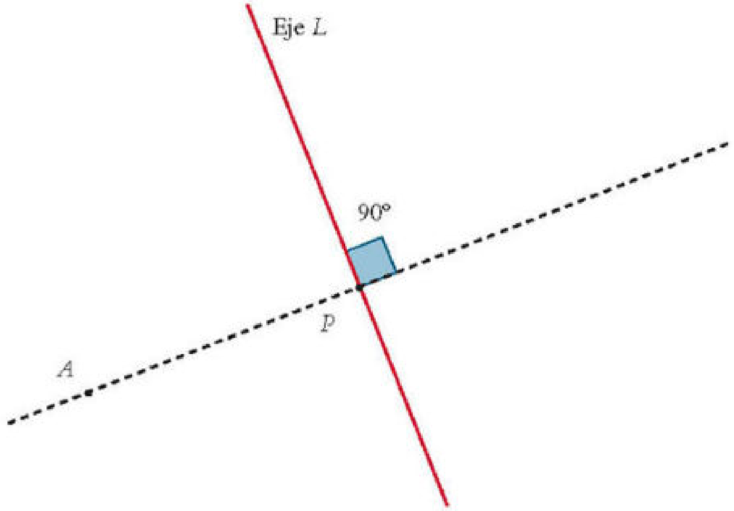


Fig. 2.28 Traza una recta perpendicular.

El eje L divide al plano en dos regiones; en una región está el punto A.

- En la otra región, sobre la recta que contiene a los puntos A y P, traza un punto A' tal que su distancia a P sea igual a $|AP|$ (Fig. 2.29).

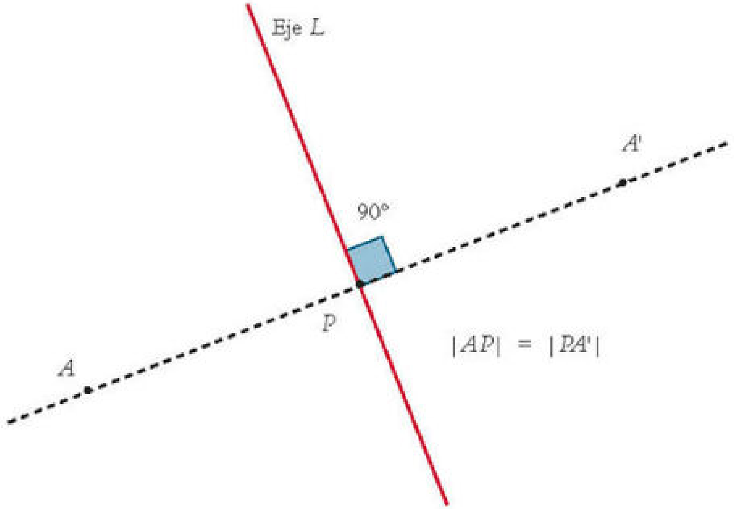


Fig. 2.29 Traza en tu cuaderno.

Una forma alternativa de construir el punto A' es mediante un círculo con centro en P y radio $|AP|$, así el punto A' será la intersección del círculo con la recta por A y P (Fig. 2.30).

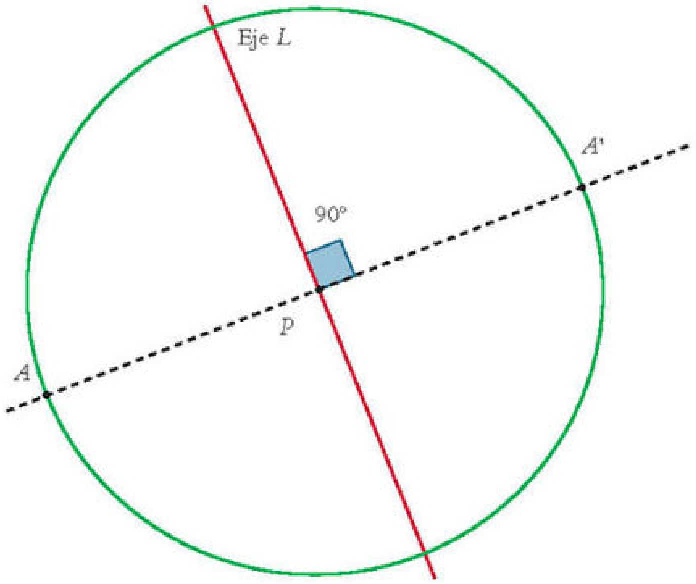


Fig. 2.30 El punto A será la intersección del círculo.

Un hecho que no debes pasar por alto: por construcción, P es el punto medio de AA' y dicho segmento es perpendicular al eje L.

- Bajo la asesoría de tu docente, comparte con el resto del grupo tus conclusiones acerca del mejor método para trazar un eje de simetría. Aporta ejemplos.

Actividad en equipo

En equipos, dibujen una recta L en su cuaderno y construyan un pentágono regular que no intersecte a L, como se muestra en la figura 2.31.

- Dibujen la imagen de la **reflexión** del pentágono **con respecto al eje** L.

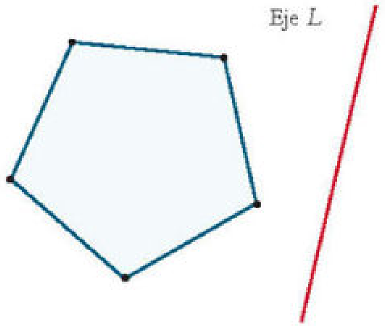


Fig. 2.31 Construyan un pentágono regular.

- Midan los lados del pentágono y su imagen bajo la reflexión.
- ¿Cuál sería la imagen de la reflexión de un punto sobre la misma recta L?
- ¿Cuál es la imagen de la reflexión de la recta L con respecto a ella misma?
- Comparen sus dibujos y respuestas con las de otro equipo y expongan los argumentos que las justifiquen.
- Busquen asesoría de su docente para esclarecer dudas.

Consideren un segmento AB y a su imagen $A'B'$, bajo la reflexión con respecto a una recta L.

- ¿Qué pueden decir sobre las longitudes $|AB|$ y $|A'B'|$?

Si dibujan en su cuaderno una construcción así, lo más probable es que las longitudes $|AB|$ y $|A'B'|$ sean casi iguales (posiblemente idénticas).

- ¿Pero no será este un problema de medición y no de cálculo? Observen la figura 2.32.

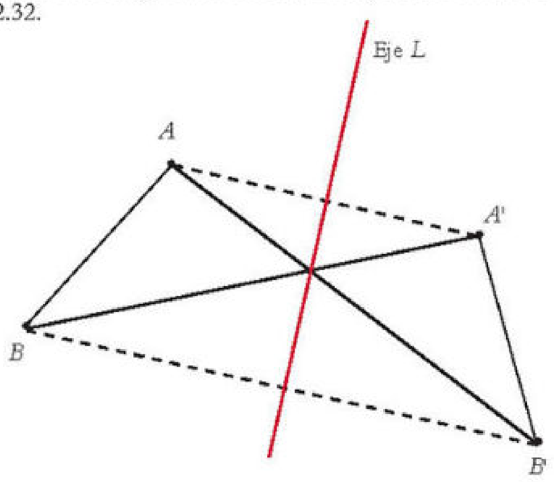


Fig. 2.32 ¿Se trata de un problema de medición o de cálculo?

Glosario

Reflexión con respecto al eje. En la construcción anterior, el punto A' se define como la imagen de la reflexión de A con respecto al eje L. A su vez el eje L define una transformación del plano en el plano: la *reflexión con respecto al eje* L.

En ella tenemos un segmento AB y su imagen bajo la reflexión por L. Ahora consideren los triángulos $\Delta ABB'$ y $\Delta B'A'A$.

- ¿Qué pueden decir, son semejantes? Puesto que tienen un lado correspondiente BB' en común, ¿podemos afirmar que: $|AB| = |A'B'|$? Expliquen su respuesta.
- De acuerdo con lo observado, ¿podemos decir que las reflexiones en el plano preservan las distancias?
- En geometría, ¿qué nombre reciben este tipo de transformaciones? Investiguen qué es una **isometría**.
- ¿Qué tienen que ver las simetrías con las reflexiones?
- Contrasten sus respuestas con las de otros equipos y discutan las diferencias; busquen asesoría de su docente para esclarecer sus dudas.

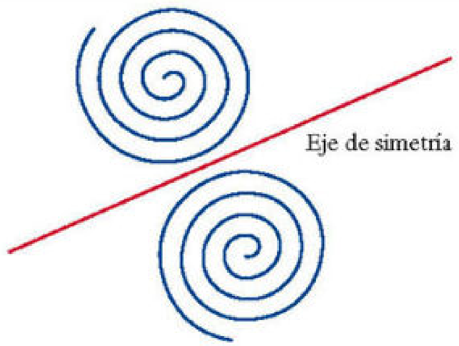
Como habrán notado, cada vez que aplicamos una reflexión a una figura geométrica, estamos creando una simetría sobre un nuevo subconjunto del plano: el generado por la figura y su imagen (ver Fig. 2.32). A esto se le llama **simetría axial**.

Glosario

Isometría. Es una transformación del plano en el plano que preserva distancias, es decir, si $A'B'$ es la imagen del segmento AB bajo dicha transformación, entonces $|AB| = |A'B'|$.

Simetría axial. Una figura geométrica o subconjunto del plano tiene una simetría axial si existe una recta L en plano tal que la imagen A' de la reflexión de cualquier punto A de la figura con respecto a L pertenece también a la figura misma.

En tal caso se dice que la recta L es un *eje de simetría* para la figura, de ahí el término simetría axial.



- ¿Qué hubiera pasado si la reflexión no fuera también una isometría? ¿Podríamos conservar el tamaño?
- ¿El objeto reflejado estaría visto a través de un espejo que cambia el tamaño y el patrón de la simetría axial se perdería? (Fig. 2.33) Discútanlo a escala grupal.

Fig. 2.33 Ha cambiado el patrón de la simetría axial.

Ahora ya sabes lo que es una simetría axial y cómo construir figuras que tengan dicha simetría. Interesante, ¿no lo crees?

- Ahora respondan, ¿qué tienen en común las dos imágenes siguientes? (Fig. 2.34)

Fig. 2.34 ¿Qué tienen en común las imágenes?

- Al parecer en cada una hay cierta simetría, ¿la reconocen? Es como si primero reflejáramos una mitad y luego la invirtiéramos. Pero, ¿cómo puede ser esto?

Actividad individual

Trabaja de manera individual.

- Dibuja en tu cuaderno un triángulo ΔABC cualquiera y un punto O fuera del triángulo (Fig. 2.35).

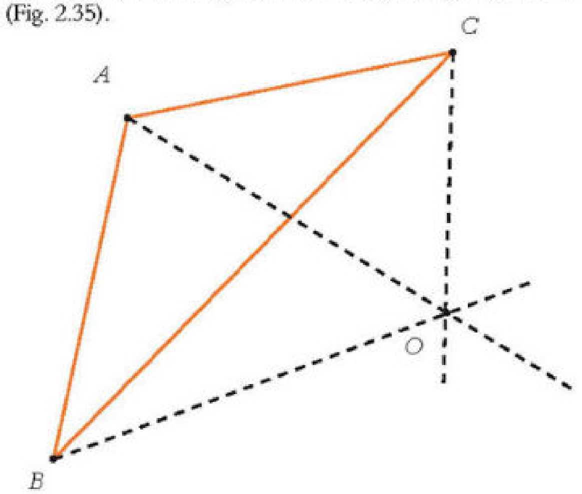


Fig. 2.35 Trabaja en tu cuaderno.

ESFINGE

- Luego, traza los segmentos AO, BO y CO. Prolóngalos hasta que O pase a ser el punto medio de los segmentos extendidos.
- Dichas prolongaciones tendrán respectivamente a los puntos A', B' y C' como extremos opuestos de A, B y C.

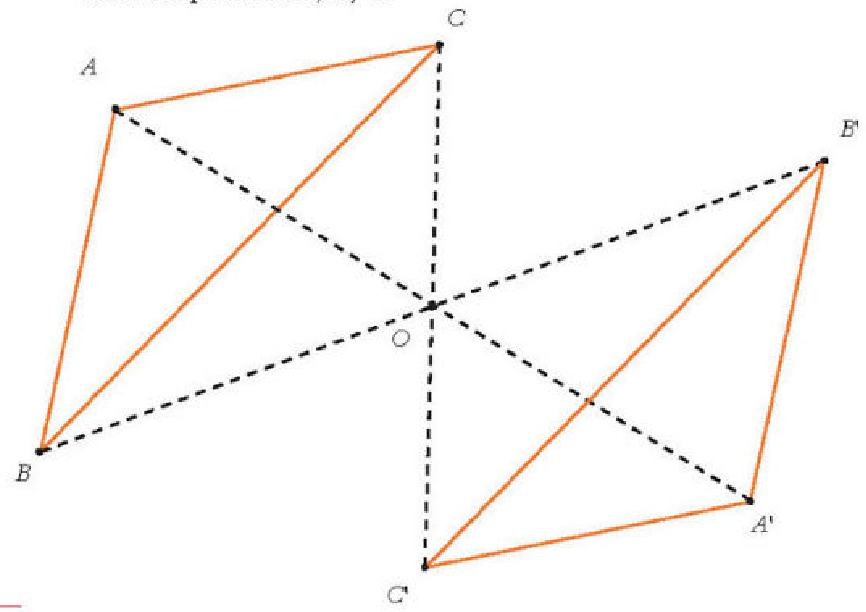


Fig. 2.36 Observa las figuras.

Por construcción tenemos que $|AO| = |OA'|$, $|BO| = |OB'|$ y $|CO| = |OC'|$.

- ¿El segmento AB mide lo mismo que $A'B'$? ¿Por qué?

- ¿Qué relación habrá entre los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$? ¿Son congruentes? ¿Miden lo mismo sus lados correspondientes?

- Reflexiona, argumenta y discute en clase las preguntas anteriores con el resto del grupo bajo la guía del docente.

En la figura (Fig. 2.36) observa que $\measuredangle AOB = \measuredangle A'OB'$ por ser opuestos al vértice O. Además, por construcción $|AO| = |OA'|$ y $|BO| = |OB'|$.

Luego, por el criterio LAL de congruencia entre triángulos, tendremos que los triángulos ΔABO y $\Delta A'B'O'$ son congruentes y, por lo tanto, $|AB| = |A'B'|$

ESFINGE

Hemos demostrado que la **reflexión con respecto a un punto** del plano también es una isometría. Maravilloso, ¿no crees? (Fig. 2.37)

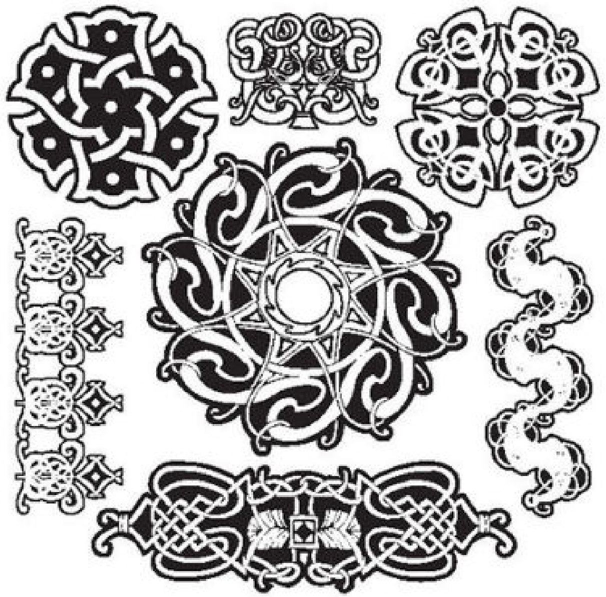


Fig. 2.37 Ilustración celta.

Glosario

En la construcción anterior el punto A' se define como la imagen de la reflexión de A con respecto al punto O. A su vez, el punto O define una transformación del plano en el plano: *la reflexión con respecto al punto O.*

Actividad en parejas

Observen en parejas las siguientes figuras:

- Indiquen y argumenten qué tipo de simetría poseen; según el caso pudieran tener ambas o ninguna. (Figs. 2.38 y 2.39)

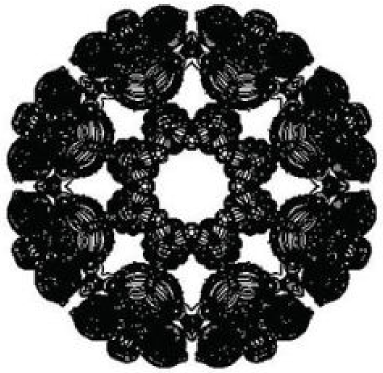


Fig. 2.38 ¿Qué tipo de simetría poseen los objetos?

ESFINGE

Fig. 2.39 ¿Qué tipo de simetría poseen los objetos?

Nuevos Conocimientos

Seguramente ya te diste cuenta que una figura plana tendrá una simetría central o axial si al reflejarla con respecto a un punto o a una recta, la figura permanece invariante, es decir, igual.
Para construir figuras con alguna simetría, aplicamos una reflexión (central o axial) a una figura cualquiera. Así, la figura y su imagen formarán una nueva figura con un patrón simétrico.
Una transformación distinta, ¿podrá servir para construir otras simetrías?
En una lección anterior aprendiste que las traslaciones y rotaciones son transformaciones isométricas. Veamos de qué manera pueden servirte para construir simetrías.

Actividad individual

Trabaja de manera individual lo que se indica.

- Dibuja en tu cuaderno un símbolo de interrogación, luego trasládalo horizontalmente. El resultado debe ser algo así (Fig. 2.40):

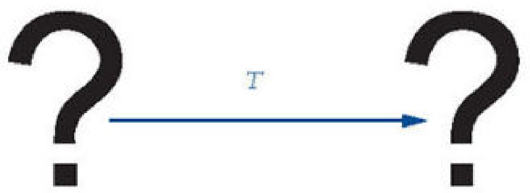


Fig. 2.40 Traslación horizontal.

- La figura compuesta por estos dos símbolos de interrogación, ¿tiene alguna simetría?

- Ahora dibuja una figura que tenga un eje de simetría L. Con una magnitud arbitraria traslada la figura en dirección oblicua al eje L (Fig. 2,41).
- Las figuras compuestas por la original y su traslación, ¿tienen alguna simetría? (Figs. 2.42 - 2.43). Discútelo con tus compañeros de grupo.

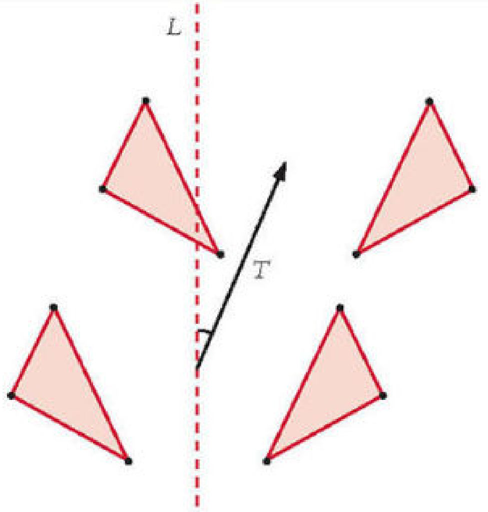


Fig. 2.41 Traslación con dirección oblicua.

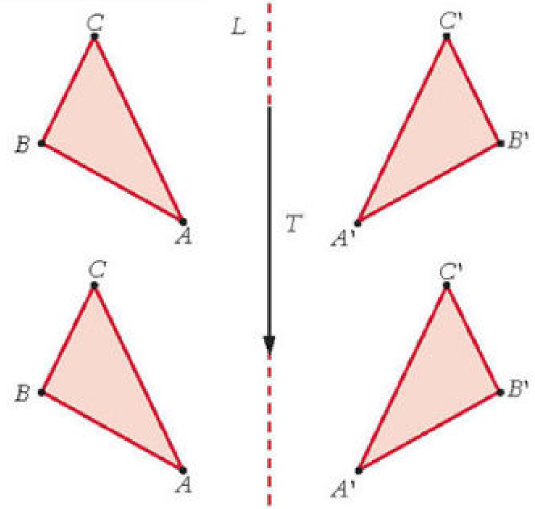


Fig. 2.42 Traslación con dirección paralela a L.

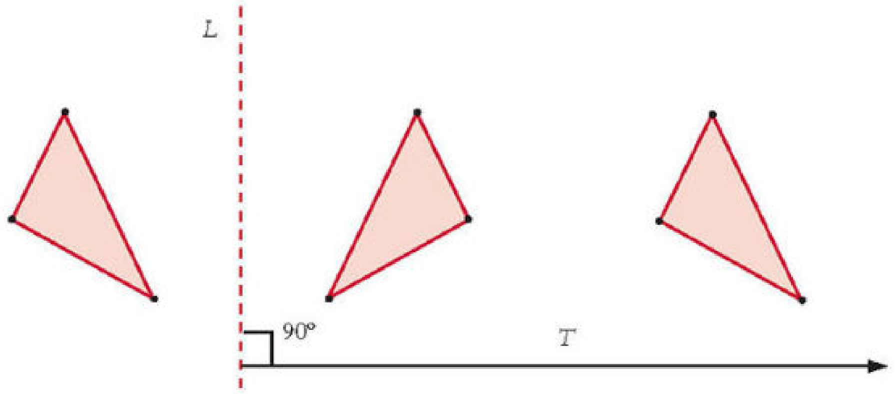


Fig. 2.43 Traslación con dirección perpendicular.

Nuevos Conocimientos

Cabe señalar que si la figura inicial no tiene ningún tipo de simetría y la trasladas en cualquier dirección y magnitud: la figura compuesta tampoco tendrá simetría alguna.
En cambio, si la figura original tiene una simetría axial y la trasladas en una dirección perpendicular o paralela al eje de simetría, la figura compuesta tendrá una simetría axial.
Inténtalo ahora con una figura inicial que tenga una simetría central. Trasládala bajo cualquier dirección y magnitud, el resultado es increíble: la figura compuesta, también tendrá una simetría central.

Actividad individual

De forma individual, dibuja en tu cuaderno una figura que tenga simetría axial, y sea L su eje de simetría; después agrega un punto O fuera de la figura que no esté en L. Finalmente, con centro en O, rota tu figura por un ángulo mayor que cero y distinto de 180.

- ¿La figura compuesta tiene alguna simetría?

Intenta de nuevo con la misma figura, ahora sitúa el punto O en el eje L, rota la figura por un ángulo mayor que cero y distinto de 180°.

- ¿La figura compuesta tiene alguna simetría?
- Comparte tus trazos y respuestas con otros estudiantes; discutan las divergencias y lleguen a conclusiones comunes con apoyo del docente.

Nuevos Conocimientos

Con la rotación tenemos resultados interesantes también. Si la figura inicial no tiene ningún tipo de simetría y la rotas con respecto a un punto O, por un ángulo de 180°, la figura compuesta tendrá una simetría central, de hecho la transformación efectuada equivale a una reflexión con centro en O.
En cambio si el ángulo de rotación es mayor que cero y distinto de 180°, la figura compuesta no tendrá ningún tipo de simetría.
Finalmente dada una figura con centro de simetría O, si la rotas con respecto a un punto O' (distinto de O), por un ángulo mayor que cero y distinto de 180°, la figura compuesta no tendrá simetrías centrales. Pero si el ángulo de rotación es igual a 180°, la figura compuesta tendrá una simetría central.
Por último, si $O' = O$ no importa cuál sea el ángulo de rotación, la figura compuesta siempre tendrá una simetría central.

Relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

Eje: Forma, espacio y medida.

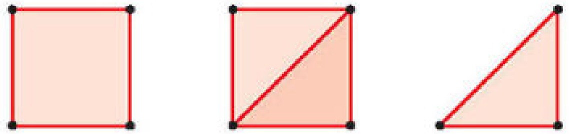
Tema: Medida.

Actividad individual

Conocimientos previos

De manera individual, recuerda tus cursos anteriores:

- ¿Cómo se obtiene el área de un cuadrado?
- Si trazamos la diagonal de ese cuadrado, ¿qué obtenemos?
- ¿Cómo obtenemos el área de las figuras resultantes?
- Comenta tus respuestas con otros estudiantes; resuelvan sus dudas con el apoyo de su docente.



área = (base) (altura) — *Diagonal* — $\frac{\text{área}}{2}$

Fig. 2.44 ¿Cómo se obtiene el área de un cuadrado?

Sabías que...

Pitágoras (Fig. 2.45) fue un matemático y filósofo griego de mediados del siglo VI a.n.e. Se le atribuyen la tabla de multiplicar, así como el teorema y el triángulo que llevan su nombre.

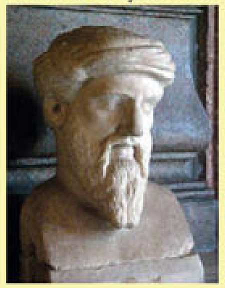


Fig. 2.45 Pitágoras.

Actividad en parejas

Trabajen en parejas para desarrollar lo siguiente:

- Utilicen una hoja milimétrica y, en un plano cartesiano, localicen los puntos $A=(3,1)$, $B=(5,1)$ y $C=(5,5)$.
- Posteriormente, únanlos de la siguiente manera: A con B, B con C y C con A.
- Recorten la figura que se forma y coloreen el área de azul.
- Con ayuda de la hoja milimétrica podrán distinguir la longitud que tienen dos de sus lados, pero para obtener la longitud del lado restante deberán acomodar la figura sobre alguna sección de la hoja, a modo que puedan obtener su longitud.

Respondan las siguientes preguntas y compartan sus respuestas con otras parejas y con el profesor.

- ¿Qué figura se formó?
- El ángulo más grande que se formó al unir los segmentos mide __°. ¿Qué nombre recibe?
- ¿Cuál es la longitud de los segmentos que conforman esta figura?
- $\overline{AB}$ = ______ $\overline{BC}$ = ______ $\overline{CA}$ = ______

Observen ahora la figura 2.46

- Dibujen un cuadrado de base y altura igual a la longitud AB de la figura y otro de longitud BC.
- Recorten y coloreen de verde; el restante de longitud CA, coloreenlo de rojo.

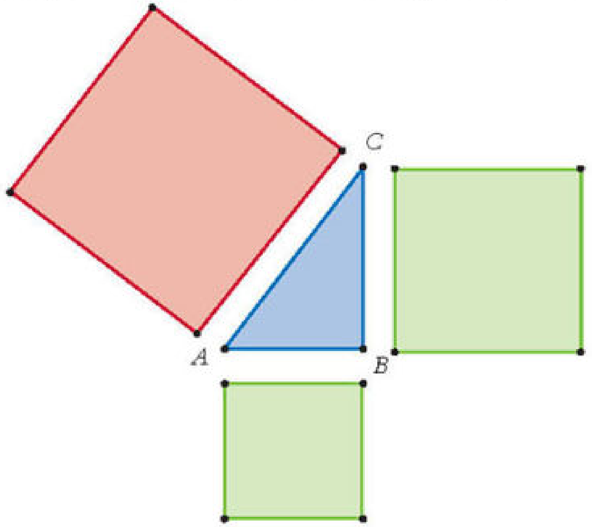


Fig. 2.46 Reproduzcan las figuras en sus cuadernos.

- Peguen las figuras en su cuaderno y calculen el área de cada cuadrado. No olviden anotar la longitud de cada uno de los lados del triángulo. Compartan su trabajo con otras parejas y discutan las diferencias con el apoyo del docente.

Actividad en equipo

En la actividad anterior construyeron los cuadrados que resultaron de cada uno de los lados de un triángulo rectángulo. Quizá se preguntarán por qué colorearon de verde dos cuadrados y de color rojo el de mayor tamaño, la razón es la siguiente:

- En su cuaderno sumen el área de los dos cuadrados verdes y observen cómo son respecto al área del cuadrado rojo.
- Escriban lo que observan y justifiquen si es o no una coincidencia.

Realicen una prueba más.

- Utilicen un *triángulo rectángulo* de las medidas que prefieran y comprueben si el fenómeno se repite; no olviden que debe tener un ángulo de 90° grados.
- Discutan con otros equipos y con el docente las conclusiones a las que llegaron y anótenlas en su cuaderno.

Nuevos Conocimientos

El fenómeno que acabas de observar lo vio por primera vez Pitágoras, por ello a él se atribuye el llamado *teorema de Pitágoras*. Él denominó *catetos* a los dos lados más pequeños del triángulo rectángulo, e *hipotenusa* al lado mayor, de modo que al enunciar el teorema queda de la siguiente manera (Fig. 2.47):

"La suma de las áreas de los cuadrados formados por los catetos, es igual al área formada por el cuadrado de la hipotenusa".

Toma en cuenta este resultado, ya que lo formalizaremos en la siguiente lección.

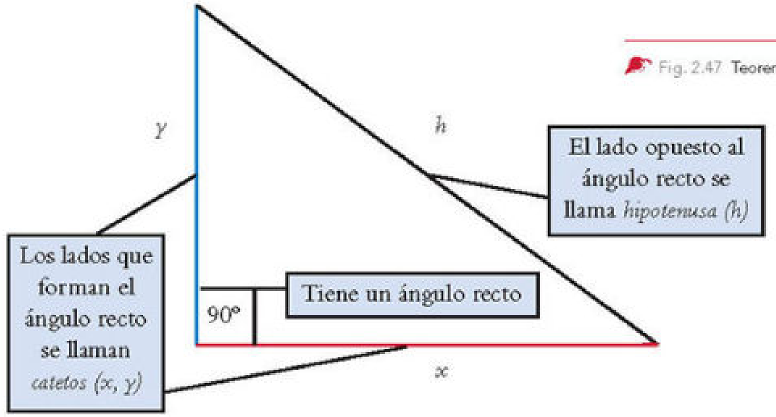


Fig. 2.47 Teorema de Pitágoras.

Un reto matemático

En equipos de trabajo desarrollen la siguiente actividad: deberán formar polígonos regulares en vez de cuadrados.

- Pueden asignar figuras diferentes para cada equipo, por ejemplo: triángulos equiláteros, pentágonos, octágonos e, incluso, con medios círculos de diámetro igual a cada lado del rectángulo (ver Fig 2.48).
- Comparen su trabajo con el de otros equipos y verifiquen si se cumple el teorema. Compartan sus resultados con el resto del grupo y con el docente.

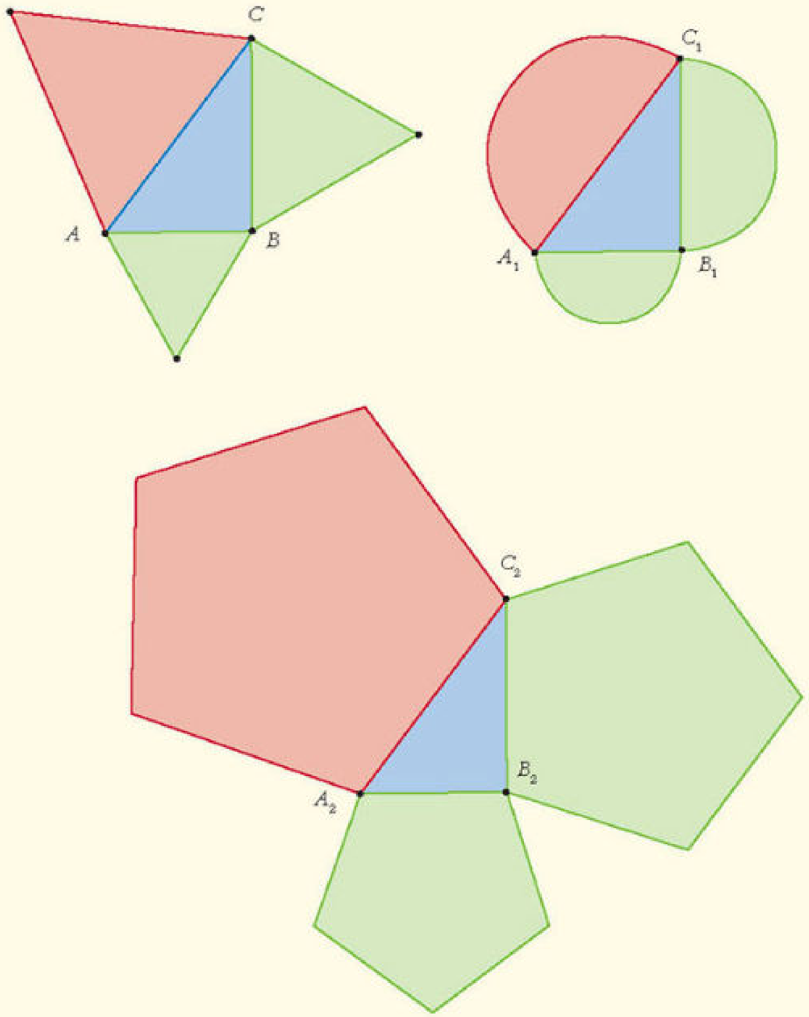


Fig. 2.48 Asignen las figuras a diferentes equipos.

Lección 2.5

Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Medida.

Actividad individual

Conocimientos previos

En la lección anterior hicimos referencia al resultado obtenido por el matemático Pitágoras, ahora vamos a formalizar este teorema y aplicarlo para resolver problemas simplificando su complejidad, verás que es posible aplicarlo en una infinidad de casos. ¡Manos a la obra!

Existen diversas demostraciones del *teorema de Pitágoras*, el cual enuncia que:

"La suma de las áreas de los cuadrados formados por los catetos, es igual al área formada por el cuadrado de la hipotenusa".

El enunciado anterior hace referencia a un triángulo rectángulo con la medida de uno de sus catetos igual a a, y el otro igual a b; h corresponde a la hipotenusa.

- Observa con detenimiento la figura 2.49.

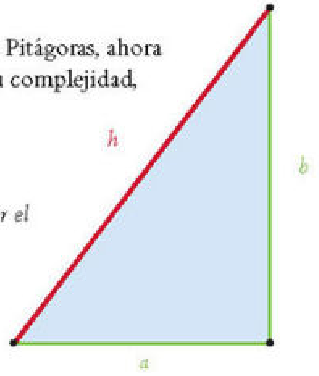


Fig. 2.49 Triángulo rectángulo.

ESFINGE

Si construyes el cuadrado del cateto a, verás que el *área* = $(a)\ (a) = a^2$

Pasa lo mismo con el cateto de longitud b, y con la hipotenusa h, así que si escribes de nuevo el resultado tendrás que (Fig. 2.50):

$$a^2 + b^2 = h^2$$

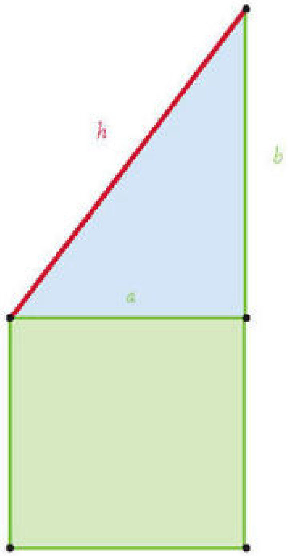


Fig. 2.50 Construcción del cuadrado del cateto.

Una de las pruebas que existen para comprobar este teorema es la siguiente: formar un cuadrado con cuatro triángulos rectángulos tal cual se indica en la figura 2.51:

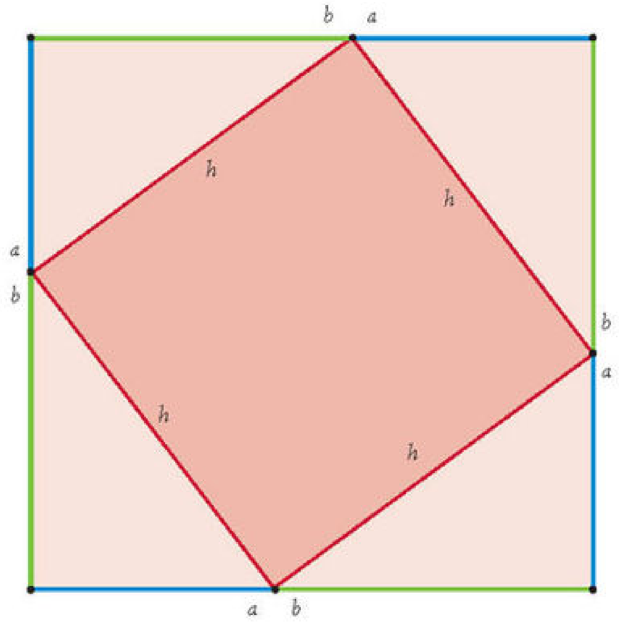


Fig. 2.51 Cuadrado a partir de cuatro triángulos rectángulos.

El área total de esta figura se puede obtener de dos formas:

- La base total de la figura es igual a $a + b$, y su altura es $a + b$
  Entonces el área queda como:

$$(a+b)\ (a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Calcular el área de cada uno de los cuatro triángulos de base a, y altura b, y después, sumar el cuadrado que se forma con las cuatro hipotenusas de base y altura h, quedando de la siguiente forma:

$$\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + (h)(h) = \frac{4ab}{2} + h^2 = 2ab + h^2$$

Como las formas anteriores representan lo mismo, son iguales; matemáticamente hablando, los dos resultados se pueden igualar.

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + h^2$$

Pasando el término $2ab$ al otro lado de la igualdad restando, resulta:

$$a^2 + b^2 = 2ab - 2ab + h^2$$

Se eliminan los dos términos y así queda el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Puedes encontrar la hipotenusa si tienes dos catetos o cualquier lado que falte con tan sólo dos de sus lados.

- Revisa el procedimiento con otros estudiantes y juntos establezcan conclusiones comunes; bajo la asesoría del docente, compartan su trabajo con el grupo.

Actividad en parejas

Trabajen en parejas:

- Escriban en su cuaderno el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = h^2$.
- Despejen cada una de las letras del teorema y anoten cómo quedaría la fórmula para encontrar cada uno de sus lados.

  h = ____________

  a = ____________

  b = ____________

- Compartan su trabajo con el grupo bajo la asesoría de su docente.

Actividad en equipo

Organizados en equipos elaboren lo siguiente:

- Completen la tabla 2.1 y tracen en su cuaderno cada uno de los triángulos que se forman con los datos obtenidos.
- No olviden anotar la longitud de cada uno de sus lados.

a	b	h	a^2	b^2	a^2+b^2	h^2	Área del triángulo
	6	10					
3		5					
		$\sqrt{2}$	1				
2.5				9			
	6					121	
			49				
				16	41		

Tabla 2.1

- Al terminar, contrasten su trabajo con el de otros equipos y diriman las diferencias de opinión con base en argumentos.
- Compartan sus conclusiones con el resto del grupo bajo la asesoría del docente.

Uso de las TIC

Visita este sitio web en el que puedes hacer pruebas de manera más dinámica con un modelo del teorema de Pitágoras elaborado en GeoGebra.
http://tube.geogebra.org/material/show/id/156120

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve los siguientes problemas primero de manera individual; después, reúnete con otro estudiante para repasar sus procedimientos y resultados.

1. Calcula la altura de un triángulo equilátero que tiene por lado 14 cm.
   h = ____________
2. ¿Cuál es la longitud de la diagonal que divide al cuadrado de 9 cm?
   largo = ____________
3. ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo que tiene como diagonal 11 cm de longitud y de base 8 cm?
   P = ____________
4. Un trabajador recarga una escalera de 8 m sobre un muro, la cual apoya en la base a 1.50 m de distancia del muro. ¿Cuál es la altura del muro al pie de la escalera?
   h = ____________
5. El pueblo natal de mi madre está (en línea recta) a 40 km al norte del hospital en que nací y ahora vivo en línea recta, 30 km al este del pueblo de mi madre. ¿Cuál es la distancia entre el hospital en que nací y mi casa?
   D = ____________
6. "Mientras caminaba por la playa me detuve a ver el horizonte. Justo frente a mí se encontraba mi primo sostenido en una boya que flotaba a 45 m de distancia de la escalera del salvavidas que se ubicaba a mi mano derecha a 30 m de distancia, él me gritaba que lo acompañara porque sabe que soy muy buen nadador, pero sólo puedo nadar 30 m continuos sin detenerme a descansar...". Termina la historia con datos precisos para darle un buen final y realiza en tu cuaderno un dibujo que represente la situación.
7. Con la asesoría de su profesor, organicen una dinámica en grupo para discutir las respuestas y escribir en el pizarrón, de común acuerdo, los procedimientos que siguieron.

Lección 2.6

Probabilidad de ocurrencia para eventos mutuamente excluyentes y complementarios

Eje: Manejo de la información.

Tema: Nociones de probabilidad.

Actividad individual

Conocimientos previos

Trabaja de manera individual. En esta lección será necesario que le eches un vistazo a la lección 1.6 porque utilizaremos conceptos para el cálculo de probabilidades. Ahora profundizaremos un poco sobre independencia.

Consideremos los siguientes eventos (Fig. 2.52):
A = Argentina le gana hoy a Brasil en un partido de futbol.
B = Esta noche hay luna llena.

A

B

Fig. 2.52 Diferentes eventos.

ESFINGE

- Reflexiona: ¿Los eventos A y B son independientes entre sí? ¿La ocurrencia de un evento influye en la ocurrencia del otro? Explica tu respuesta.

La lógica es la siguiente:

Hoy Argentina y Brasil jugarán un partido de futbol y después de indagar con los expertos en ese deporte, llegamos a la conclusión de que la probabilidad de que Argentina gane es de 0.6. En ese momento miramos por la ventana y nos damos cuenta de que hoy hay luna llena. ¿Eso modificará la probabilidad de que Argentina le gane a Brasil subiendo hasta 1 dicha probabilidad? ¿Podríamos decir que es distinta de la probabilidad de que gane Argentina en una noche cualquiera? Probablemente no, a menos que supongamos que los astros afectan de manera directa el desempeño de los futbolistas de distintos países.
Dicho de otra forma $P(A)$ dado que ocurra B no se altera, porque el hecho de saber que ocurrió B no afecta la probabilidad de que ocurra A. Existe una manera matemática de expresar el argumento anterior:
Si A y B son independientes entonces $P(A|B)=P(A)$, se lee, la probabilidad de que ocurra A dado que ocurrió B.

Actividad en parejas

Formen parejas de trabajo para analizar los siguientes eventos y justificar si son o no independientes; discutan sus conclusiones con el resto del grupo y con su docente.

1. Que al tirar una moneda y un dado salga águila en la moneda y 6 en el dado.
2. Que la clase sea buena y que los alumnos entiendan.
3. Que una bolsa de frijoles pese más de 500 g y contenga al menos 30 g de piedras.
4. Que llueva y suene el teléfono en los próximos 5 minutos.
5. Que llueva y haya nubes.
6. Que un número telefónico termine en par y que ese mismo número sea impar.
7. Que al tirar una moneda y un dado salga cara en la moneda y no salga 3 en el dado.

ESFINGE

Nuevos Conocimientos

En ocasiones saber la probabilidad de un evento es más difícil de lo que parece. Para calcular el dato requerido se utilizan ciertos recursos, por ejemplo, la probabilidad de que ese evento que se quiere no ocurra; parece un poco confuso, porque si quieres saber que sí pasará, por otro lado calculas que no pase, parece no tener sentido, la lógica es la siguiente:

Se quiere saber la probabilidad de que al lanzar un dado salga 1 o 2.

El espacio muestral es Ω=1, 2, 3, 4, 5, 6 correspondiente a los posibles resultados, eso quiere decir que puedes calcular la probabilidad de obtener uno de los dos números que no pide el experimento, anteriormente viste que esto se representa mediante $\frac{1}{6}$, pero aún no lo has visto con dos números, así que utilizaremos la lógica anterior.

Antes de empezar recuerda que la probabilidad se representa con valores que están entre cero y uno. Eso es una gran ventaja, porque puedes utilizar el *complemento*, es decir, obtener todos los resultados con excepción del que quieres que pase.

Por ejemplo, si quieres obtener el número 5 al lanzar el dado, $P(5)=\frac{1}{6}$, sabes que forzosamente debe salir un número, así que la probabilidad de que no salga 5, es el éxito total menos la probabilidad de que salga 5, eso tiene sentido, ya que el éxito total sería obtener un número entre 1 y 6 al lanzar el dado, eso es que seguro sale un número de esos, por lo tanto, el resultado es 1, así:

P (de que no salga 5) = 1 – P (de que sí salga)
P (de que no salga 5) = $1 - \frac{1}{6}$
P (de que no salga 5) = $\frac{5}{6}$

Eso quiere decir que el hecho de obtener el resultado que no ocurra complementa al que sí ocurra, a eso se le llama *eventos complementarios*, porque al sumarlo da como resultado el éxito total, que es 1.

Regresando al ejemplo original, calcular el complemento del evento buscado, es decir; la probabilidad de obtener un número diferente a 1 o 2.
"La suma de las áreas de los cuadrados formados por los catetos, es igual al área formada por el cuadrado de la hipotenusa".

Toma en cuenta este resultado, ya que lo formalizaremos en la siguiente lección.

Queda el 3, 4, 5 y 6, así que son cuatro de seis posibles.
Entonces:
$P(1 \text{ o } 2) = 1 - \frac{4}{6}$
$P(1 \text{ o } 2) = \frac{2}{6}$
$P(1 \text{ o } 2) = \frac{1}{3}$

Actividad en equipo

Formen equipos de trabajo para calcular las siguientes probabilidades y escribir sobre las líneas los resultados obtenidos. No olviden anotar el espacio muestral de cada uno.

- Se sabe que la probabilidad de que un futbolista meta un penal es 0.84, ¿cuál es la probabilidad de que lo falle?
- En una fábrica de focos se han realizado los cálculos para saber que por cada pedido de 5 000 focos la probabilidad de que 1 venga defectuosos es 0.08, ¿cuál es la probabilidad de que al escoger uno al azar, no venga defectuoso?
- Se sabe que la probabilidad de que un vuelo salga a tiempo es .35, ¿cuál es la probabilidad de que se retrase la salida?
- Comparen sus respuestas con las de otros equipos y discutan las diferencias; acudan a su docente para recibir asesoría.

Se establece ahora que si dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno o el otro, es igual a la suma de sus probabilidades. Es decir:
Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes entonces:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Actividad individual

Trabaja en solitario para calcular las siguientes probabilidades y anotar los resultados en tu cuaderno, no olvides definir el espacio muestral.

- En un estante hay cinco libros de diferentes materias: Educación Ambiental, Matemáticas, Historia, Química y Física. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer uno al azar, sea de Física o Matemáticas?
- En una urna hay dos pelotas azules, tres rojas y dos verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una al azar, se obtenga una azul o roja?
- En casa de Mónica viven sus papás y sus dos hermanas. ¿Cuál es la probabilidad de que al sonar el teléfono pidan hablar con su papá o su mamá?
- Compara tus respuestas con las de otros estudiantes, así como los razonamientos que seguiste para contestar; luego, compartan con el resto del grupo sus conclusiones bajo la guía del docente.

Evaluación

Resuelve los siguientes problemas de manera individual, pero puedes comentar con otros estudiantes los procedimientos que seguirás y revisar las lecciones necesarias antes de responder.

1. Un terreno tiene un área de $x^2 - 16x + 60$, ¿cuáles son las dimensiones del terreno expresadas como el producto de dos factores?

a) $(x+6)(x+10)$ b) $(x-5)(x-8)$ c) $(x-6)(x-10)$ d) $(x-6)(x+10)$

2. El cuádruple del área de un tapete cuadrado menos ocho veces la medida de su lado es igual a cero. ¿Cuánto mide cada lado del tapete?

a) 2 u b) 3 u c) 4 u d) 6 u

3. En el plano, ¿una rotación es una transformación que mueve absolutamente a todos los puntos?

a) Falso
b) Verdadero

4. Si aplicamos una rotación con centro C y ángulo $\varnothing = 360°$, ¿qué puntos serán su propia imagen bajo la rotación?

a) Sólo algunos puntos
b) Todos los puntos del plano
c) Únicamente el centro de rotación C
d) Sólo los puntos que son muy cercanos a C

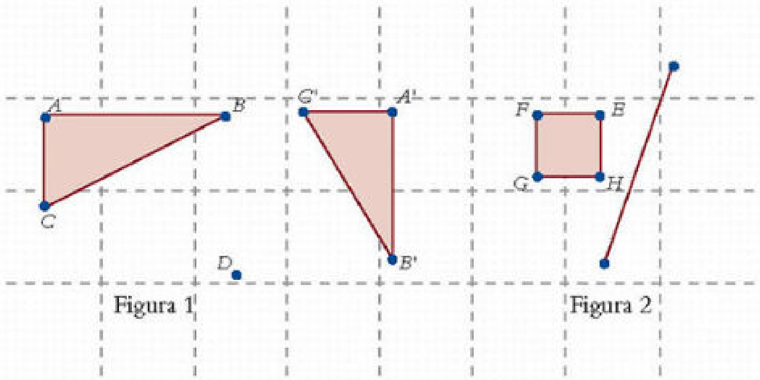
5. Dado un triángulo ΔABC y un punto C fuera de él. Si tomamos como centro a C y rotamos al triángulo por un ángulo $\varnothing$, ¿cambiará de tamaño el triángulo?

a) No, si el triángulo tienen un ángulo recto
b) Depende del ángulo de rotación
c) Generalmente no, pero depende del tipo de triángulo y del ángulo
d) No, porque las rotaciones preservan distancias y ángulos

6. Es un hecho, las traslaciones en el plano son transformaciones que preservan las longitudes y los ángulos.

a) Falso
b) Verdadero

7. Observa las figuras y responde:

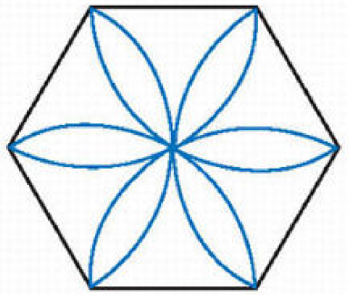


- ¿Cuál de las figuras representa un movimiento de rotación? ______
- ¿Cuántos grados se mueve? ______ ¿Cómo lo puedes comprobar? ______
- La figura que tiene un eje de simetría, ¿qué tipo de movimiento representa? ______
- Realiza el movimiento de traslación en la figura 2.
- Si comparas ambos movimientos, ¿cuál sería la diferencia entre ellos? ______
- Describe qué sucede con los ángulos y los lados de las figuras en cada uno de los movimientos. ______
- ¿Cuál de los siguientes transportes puede moverse siguiendo el trayecto de un cuadrado, realizando solamente traslaciones?

  a) coche b) helicóptero c) barco d) bicicleta
- Argumenta tu respuesta. ______

8. ¿Qué simetrías tiene la siguiente imagen?

a) Simetría central y axial
b) Simetría oblicua y transversal
c) Simetría geométrica
d) Simetría periférica y central



9. Comparte tus respuestas con otros estudiantes y relata los procedimientos y razonamientos que seguiste para contestar. Bajo la asesoría del docente, validen los resultados ante el grupo.

BLOQUE III

Aprendizajes esperados

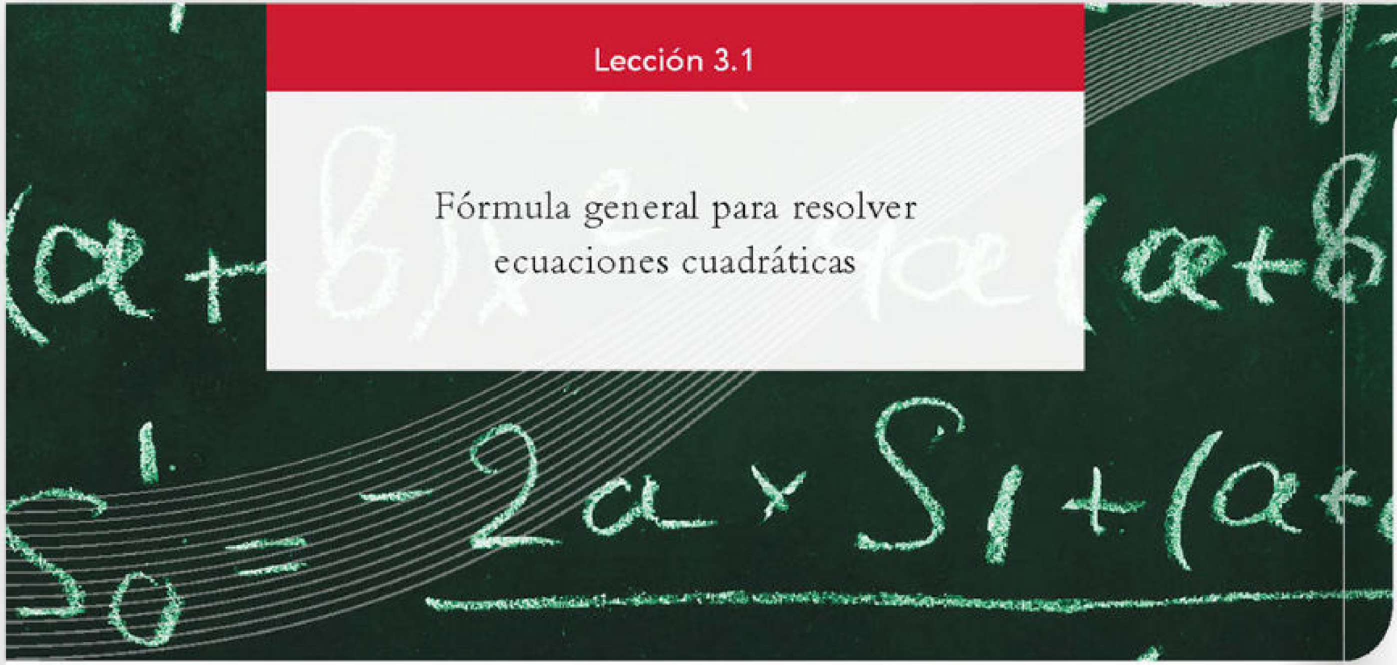
- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

En el tercer bloque de tu curso de Matemáticas resolverás problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas, aplicarás criterios de congruencia y semejanza de triángulos, resolverás problemas geométricos mediante el teorema de Tales de Mileto, realizarás lectura y construcción de figuras homotéticas y cálculo de la probabilidad de eventos independientes.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Planeación del Profesor
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	3.1	14	
Forma espacio y medida	Figuras y cuerpos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	3.2	15	
		Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	3.3	16	
		Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	3.4	17	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	3.5	18	
		Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	3.6	19	
	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	3.7	20	



Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tema: Patrones y ecuaciones.

Actividad individual

Conocimientos previos

Ya conociste cómo resolver problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas utilizando métodos personales u operaciones inversas y factorización.

En esta lección aprenderás otro procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones.

Resuelve en forma individual el siguiente problema.
Aurora compró $x + 1$ pantalones a $x + 3$ pesos cada pantalón y pagó \$ 63 pesos.
Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos pantalones compró?
- ¿Qué procedimiento utilizaste para obtener el resultado? Descríbelo.
- ¿Cuántos procedimientos conoces para resolver ecuaciones de segundo grado?
- Comparte tus respuestas con otros estudiantes; expongan los razonamientos que siguieron para contestar.
- Pidan asesoría a su docente para resolver dudas y llegar a conclusiones comunes a escala grupal.

Actividad en parejas

En parejas, resuelvan en su cuaderno la siguiente situación:

Santiago compró cierto número de pelotas de tenis y pagó 120 pesos. Si hubiera comprado 4 pelotas menos por el mismo dinero cada pelota le hubiera costado 1 peso más.

- ¿Cuántas pelotas compró? ¿Cuánto le costó cada una?
- ¿Qué representa la x en este problema?
- Suponiendo que Santiago compró 10 pelotas, ¿qué harían para saber cuánto costó cada una?
- ¿Cómo representarían en lenguaje algebraico suponiendo que Santiago compró x pelotas?
- Representen en lenguaje algebraico "tantas pelotas menos 4" y "\$ 1 por pelota".
- Con ayuda de las expresiones anteriores, escriban la ecuación correspondiente para resolver el problema.
- ¿Qué tipo de ecuación resultó?
- ¿Podemos saber cuántas soluciones tiene la ecuación antes de resolverla?
- ¿Qué procedimiento utilizaron para resolver la ecuación?
- Compartan con otras parejas el procedimiento que siguieron y las respuestas que obtuvieron; expongan sus argumentos.
- Luego de resolver sus dudas, pidan a su docente apoyo para alcanzar respuestas comunes a escala grupal; escríbanlas en el pizarrón.

Los conocimientos

Para resolver ecuaciones cuadráticas existe un método muy particular además de la factorización, se trata de una fórmula que facilita su solución.

Sabemos que la forma canónica de una ecuación de segundo grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en donde (ver Tabla 3.1):

Ecuación cuadrática	Término *a*	Término *b*	Término *c*
$ax^2 + bx + c = 0$	término cuadrático x^2 en donde $a \neq 0$	término lineal x	término independiente
$3x^2 + 2x - 5$	3	2	–5

Tabla 3.1

La *fórmula general* ayuda a obtener las soluciones de una ecuación cuadrática. Con ella puedes resolver cualquier ecuación de segundo grado, pero generalmente se utiliza cuando se trabajan cantidades grandes o hay fracciones involucradas.

La fórmula con la que se resuelven las ecuaciones cuadráticas es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si resolviste el problema anterior, a continuación encontrarás recursos que te ayudarán a aclarar dudas o a reafirmar conocimientos que podrás utilizar en problemas similares.

- El primer paso es plantear la ecuación del problema que lo modela:

$$\frac{120}{x-4} = \frac{120 + x}{x}$$

- Posteriormente, escribir la ecuación en su forma canónica.

- Escribe en tu cuaderno esta ecuación y simplifícala hasta obtener una del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es la que modela el problema anterior? Discútelo con otros estudiantes.
  a) $x^2 - 248x - 480 = 0$ b) $x^2 - 4x - 480 = 0$ c) $x^2 - 240x - 480 = 0$

- Una vez que se tiene la ecuación, determina los valores de los términos a, b y c.

$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______

- Sustituye los valores anteriores en la fórmula general:

$$x = \frac{(\quad) \pm \sqrt{(\quad) - (\quad)(\quad)}}{(\quad)}$$

- Simplifica: $x = \pm \dfrac{\sqrt{\quad}}{\quad}$

$x =$ ________________

En donde el signo $\pm$ del numerador significa que una de las soluciones se obtiene usando el signo + y la otra utilizando el signo –.

- Resuelve las ecuaciones:

$x_1 = \dfrac{4 + 44}{2} =$ ________ $x_2 = \dfrac{4 - 44}{2} =$ ________

- Como x se refiere al número de pelotas que Santiago compró, ¿la solución puede ser negativa? Explica por qué.
- ¿Cuántas pelotas adquirió? Discútelo con otros estudiantes.
- Ahora que sabes cuántas pelotas compró, ¿cuánto pagó por cada una?
- En caso de tener una ecuación incompleta, el término faltante vale cero. Escribe la ecuación.
- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación? Coméntalo con otros estudiantes y luego comparte tus respuestas con el resto del grupo bajo la guía del docente.

Actividad individual

Resuelve de manera individual el siguiente problema.
Andrea quiere armar una caja cuadrangular para envolver un regalo. Debe tener un volumen de 140 cm³ para lo cual traza cuadros en las esquinas de 3 cm de cada lado para poder doblar los lados hacia arriba (Fig. 3.1).

Recuerda

El volumen de un prisma es área de la base por altura. Cuando la base es cuadrangular o rectangular podemos decir que:
V= (largo)(ancho)(altura)

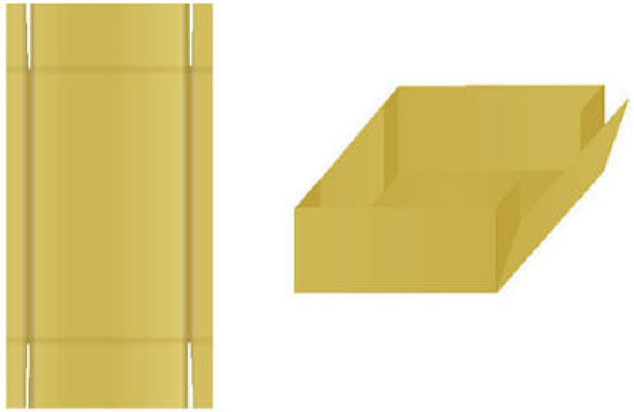


Fig. 3.1 Armado de una caja de cartón.

Contesta las siguientes preguntas y describe el procedimiento que utilizaste:

- ¿Cuál es la ecuación que representa este problema?
- ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?
- Comparte tus respuestas con el resto del grupo con la asesoría del docente.

Discriminante

El *discriminante* es el valor que hay adentro de la raíz cuadrada de la fórmula cuadrática. Permite conocer las soluciones que tiene la ecuación.

$$x = \frac{b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longleftarrow \textit{discriminante}$$

Existen tres casos:

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones.

Escribe y justifica cada una de tus respuestas:

- En la actividad anterior, ¿cuál es el valor del discriminante?
- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?
- ¿Cuántas soluciones tiene este problema?

b) Si $b^2 - 4ac$ es 0, existen dos soluciones iguales.

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

- ¿Cuál es el valor del discriminante?
- ¿Cómo son las soluciones?

c) Si $b^2 - 4ac$ es < que 0, entonces las soluciones no son números reales.

$$2x^2 - 4x + 15 = 0$$

- ¿Cuál es el valor del discriminante?
- ¿Cómo son las soluciones?
- Compara tus respuestas con las de otros estudiantes y defiende tu trabajo con argumentos; compártelos luego a escala grupal con apoyo de tu docente.

Ejercicios y aplicaciones

¡Practica!

En parejas resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas, al finalizar comenten con sus compañeros y profesor sus resultados.

1. Escriban en su cuaderno la ecuación de cada uno de los problemas.

a) El producto de dos números consecutivos es 1 640. ¿Cuáles son esos números?

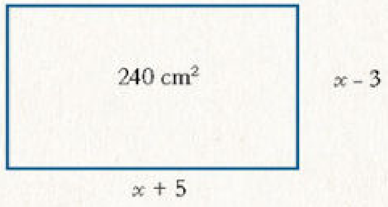
b) A un grupo de estudiantes le hicieron descuento para asistir a un concierto. La entrada les costó \$ 400. Si hubieran ido 4 estudiantes menos el boleto les hubiera costado \$ 10 más. ¿Cuántos estudiantes fueron al concierto?

c) Un beisbolista lanza una pelota verticalmente hacia arriba. La altura máxima que alcanza la pelota después de t segundos está definida por la ecuación $h = 35t - 10t^2$. ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en caer al césped?

d) ¿Cuánto tiempo tardará un proyectil en alcanzar una altura de 600 m en t segundos si la altura está dada por la ecuación $h = 120t - 6t^2$?

2. Observen las figuras 3.2 y 3.3 y obtengan sus dimensiones. Anoten la ecuación en su forma canónica, así como su solución en el espacio asignado y resuelvan en su cuaderno la ecuación con la fórmula general.

e)

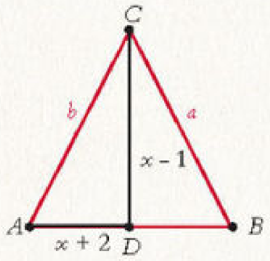


Ecuación:

$x =$

Fig. 3.2 Obtengan las dimensiones del rectángulo.

f)



Área = 77 cm²

Ecuación:

$x =$

Fig. 3.3 Obtengan las dimensiones del triángulo.

g) Miguel armará una caja cuadrangular a la cual le han quitado de cada esquina cuadrados de 2 cm por lado para poder doblar las aristas (Fig. 3.4).

Si el volumen de la caja es de 256 cm³, ¿cuánto miden los lados de la caja?

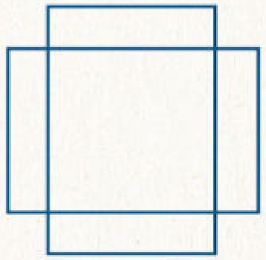


Fig. 3.4 ¿Cuánto miden los lados de la caja?

h) En parejas, resuelvan las ecuaciones en su cuaderno y completen la tabla 3.2:

Ecuación	Términos			Discriminante		Valor	
	a	b	c	Signo	Soluciones	x_1	x_2
$x^2 + 12x + 36 = 0$							
$5x^2 - 4x - 5 = 0$							
$x^2 - 25 = 0$							
$4x^2 + 32x + 64 = 0$							
$x^2 + 6x + 14 = 0$							
$2x^2 + 3x + 22 = 0$							
$x^2 + 17x + 30 = 0$							
$9x^2 + 6x + 1 = 0$							
$3x^2 - 5x + 6 = 0$							
$16x^2 + 16x + 4 = 0$							
$x^2 - 15x - 100 = 0$							

Tabla 3.2

Resuelvan las siguientes preguntas a nivel grupal y escriban las respuestas en su cuaderno.

- ¿Qué relación existe entre la columna del discriminante y la del valor?
- ¿Cuáles de las ecuaciones involucradas en la tabla hubieras podido resolver con factorización? ¿Por qué?

3. Con la asesoría de su profesor, organicen una dinámica en grupo para discutir las respuestas y escriban en el pizarrón, de común acuerdo, los procedimientos que siguieron.

Lección 3.2

Criterios de congruencia y semejanza de triángulos

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Figuras y cuerpos.

Actividad en parejas

Conocimientos previos

En esta lección vas a requerir algunos conocimientos adquiridos en cursos anteriores: criterios de congruencia, criterios de semejanza, rectas y puntos notables del triángulo: mediatrices, alturas, bisectrices, circuncentro, ortocentro e incentro.

- Consulta tus libros de texto de ciclos anteriores y, junto con otro estudiante, repasen los temas mencionados.

Criterios de congruencia

Criterio LAL. Dos triángulos son congruentes si dos lados y un ángulo comprendido entre ellos son iguales.
Criterio ALA. Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado entre ellos son respectivamente iguales con los mismos de otro triángulo.
Criterio LLA. Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Problemas de congruencia y semejanza

Vamos a resolver problemas para los cuales será necesario que recuerdes los conceptos de congruencia y semejanza entre triángulos.

Criterios de semejanza

Criterio AA. Dos triángulos son semejantes si dos ángulos internos de uno son iguales a dos del otro.

Criterio LAL. Dos triángulos son semejantes si dos lados de uno son proporcionales a dos del otro y si los ángulos entre estos dos lados son iguales.

Criterio LLA. Dos triángulos son semejantes si dos lados de uno son proporcionales a dos lados del otro y si el mayor de los ángulos opuestos de uno es igual al mayor de los ángulos opuestos del otro.

Actividad individual

A partir de las medidas (ángulos y lados) de los siguientes triángulos (Figs. 3.5 y 3.6) y aplicando los criterios de congruencia necesarios:

- Calcula el perímetro del cuadrilátero $ABCD$ y señala qué criterios utilizaste para ello.

Fig. 3.5 Reproduce las figuras en tu cuaderno.

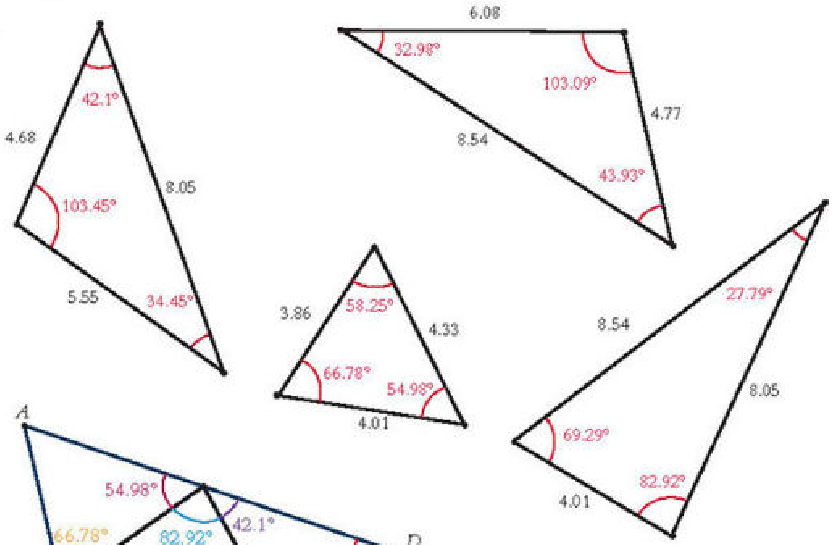
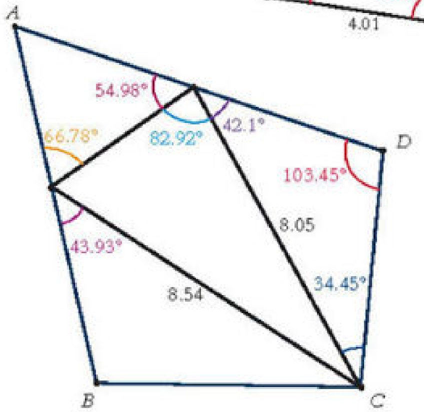


Fig. 3.6 Reproduce las figuras en tu cuaderno.



Nota. Las fracciones de ángulos no enteras, las hemos escrito en forma decimal, por ejemplo 0.9° + 0.1° = 2°, donde 0.9° y 0.1° es igual a 910 y 110 de grado, respectivamente.

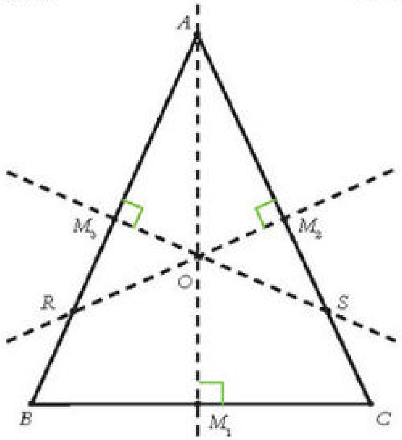
- Compara tus resultados con los de otros estudiantes y discute las diferencias con base en argumentos; lleva tus comentarios y conclusiones a escala grupal bajo la asesoría de tu docente. Escribe las respuestas correctas en el pizarrón.

Actividad en equipo

En la figura 3.7, M_1, M_2 y M_3 son los puntos medios de los lados del triángulo isósceles ΔABC. A su vez los segmentos AM_1, RM_2 y SM_3 están dados por las intersecciones de las mediatrices con el triángulo mismo.

- Señalen en equipo cuáles triángulos al interior de ΔABC son congruentes entre sí, y mencionen qué criterio de congruencia lo justifica.
- Comparen sus respuestas con las de otros equipos y expliquen los razonamientos que siguieron para establecer los criterios de congruencia. Ejemplifiquen.
- Compartan con el resto del grupo sus resultados y, mediante una dinámica conducida por su docente, lleguen a conclusiones comunes.
- Resuelvan sus dudas y escriban las respuestas correctas en el pizarrón para conocimiento de todo el grupo.

Fig. 3.7 Reproduce la figura en tu cuaderno.



Un reto matemático

Tomando en cuenta sus resultados, respondan lo siguiente:

- ¿Qué pasaría si el triángulo fuera equilátero?

- ¿Y si fuera escaleno?

Actividad individual

Observa la figura 3.8 a partir del paralelogramo $ABCD$ y sus diagonales.

- Identifica cuáles son los triángulos congruentes entre sí y, en cada caso, enuncia los criterios de congruencia que aplicaste.

> **Recuerda**
>
> Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos y, por tanto, miden lo mismo.

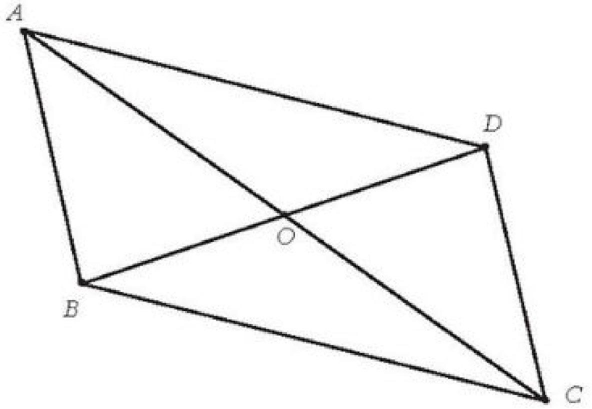


Fig. 3.8 ¿Cuáles son los triángulos congruentes?

- Expón tus respuestas ante el grupo y argumenta con base en los criterios de congruencia que observaste.
- Establezcan conclusiones comunes con el apoyo de su docente.

Un reto matemático

Aplicando tu resultado anterior: ¿cuál sería una condición suficiente para que un cuadrilátero sea un paralelogramo?

____

____

Actividad individual

Pedro necesita determinar la distancia $|AB|$ tomada sobre un lago en dirección de este a oeste (ver figura 3.9). Él no puede medir la distancia directamente sobre el agua, así que plantea la siguiente situación: elige un punto D sobre la tierra, desde el cual pueda trazar una línea recta hasta el punto B, de forma que logre medir la distancia $|BD|$; luego, sobre el segmento BD, marca un punto C entre los extremos B y D. Entonces, Pedro se mueve desde el punto D en una dirección oeste este hasta el punto E, desde el cual queda alineado con los puntos C y A, es decir, la línea que se visualiza desde E hasta A contiene también a C.

Finalmente, con una cuerda muy larga, Pedro obtiene las siguientes medidas:

$|DE| = 206$ m
$|DC| = 130$ m
$|BC| = 632$ m
$|CE| = 154$ m

- Analiza si esta información es suficiente para calcular la distancia $|AB|$, y si es así, obtenla. Al terminar, compare tu respuesta y procedimientos con otros estudiantes y, con la asesoría de su docente, generalicen las respuestas al grupo.

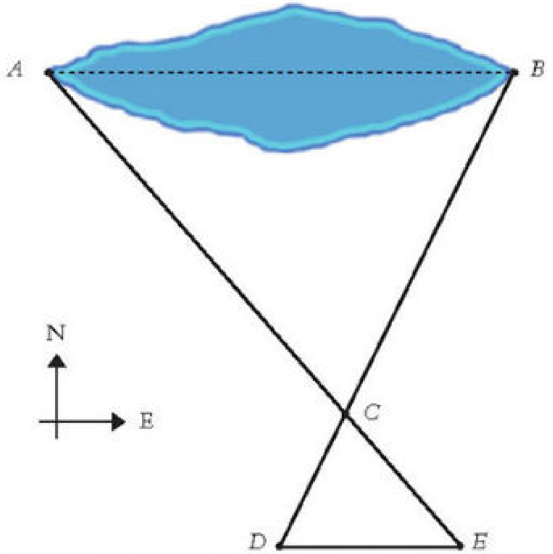


Fig. 3.9 ¿Cómo podemos determinar la distancia |AB|?

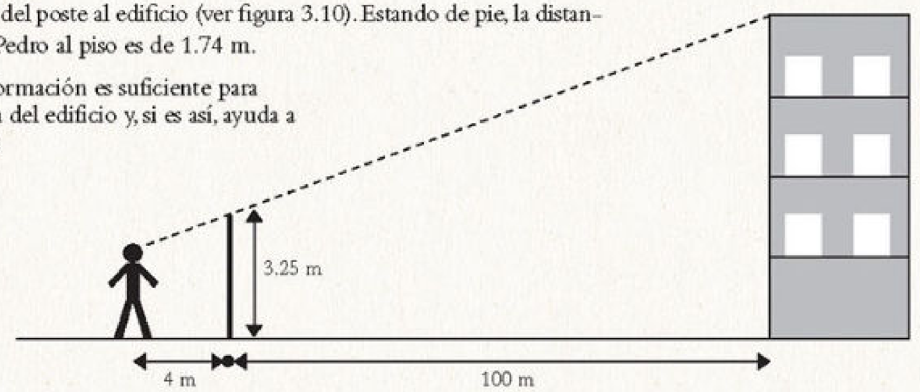
Ejercicios y aplicaciones

Resuelve los siguientes problemas primero en forma individual; al terminar, compara con otro estudiante tus resultados y procedimientos.

1. Ahora Pedro necesita determinar la altura de un edificio muy alto. Alrededor del edificio hay una explanada muy amplia y en ella un poste que mide 3.25 m de la base a la punta. Pedro se posiciona en la explanada de modo que el poste quede entre el edificio y él. Luego se aleja del edificio hasta que con su mirada percibe que la punta del poste está alineada con la parte más alta del edificio y marca en el piso el lugar donde están situados sus pies. Posteriormente, mide la distancia de la marca al poste y del poste al edificio (ver figura 3.10). Estando de pie, la distancia de los ojos de Pedro al piso es de 1.74 m.

- Analiza si esta información es suficiente para encontrar la altura del edificio y, si es así, ayuda a Pedro a calcularla.

Fig. 3.10 ¿Cómo podemos determinar la altura del edificio?



2. Para determinar el ancho del río, Pedro inspecciona el lugar y obtiene las siguientes medidas en metros (ver Fig. 3.11).

- Analiza si esta información es suficiente para calcular el ancho del río. Si es así, ayuda a Pedro y resuelve el problema.

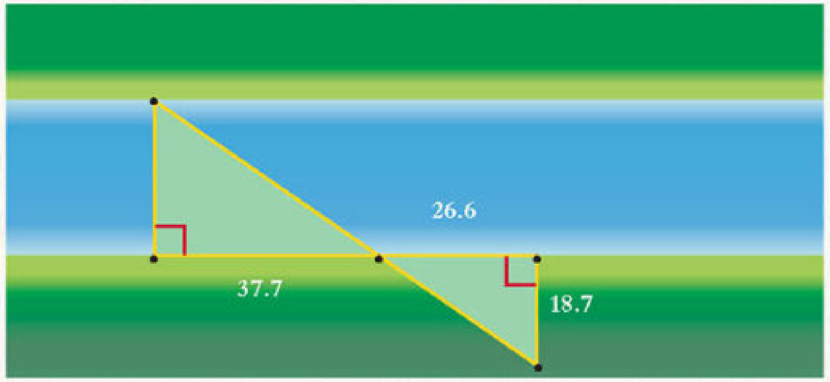


Fig. 3.11 ¿La información en la figura es suficiente para calcular el ancho del río?

3. Con la asesoría de su profesor, organicen una dinámica en grupo para discutir las respuestas y escribir en el pizarrón, de común acuerdo, los procedimientos que siguieron para responder.

Lección 3.3

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Figuras y cuerpos.

Conocimientos previos

En esta lección recordaremos algunos temas estudiados en cursos anteriores: Conceptos y criterios de congruencia y semejanza de triángulos; Construcción con regla y compás de una recta paralela a una recta dada. Consulta tus libros de texto de primero y segundo grado.

Sabías que...

Tales de Mileto (625-546 a.n.e.) fue un filósofo y geómetra griego, conocido en su época por el uso innovador de la geometría. Su entendimiento fue tanto teórico como práctico (Fig. 3.12).

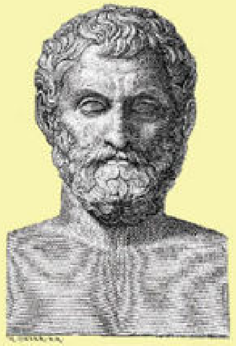


Fig. 3.12 Tales.

Sabías que...

Alguna vez dijo: *"El espacio es la cosa más grande, ya que contiene a todas las cosas..."*.

Tales comprendió muy bien los conceptos sobre triángulos semejantes y ángulos rectos; de hecho, utilizando estos conocimientos logró medir la altura de las pirámides por sus sombras.

El resultado que vamos a presentarte ya lo has abordado implícitamente cuando estudiaste triángulos semejantes, por lo que pudiera resultarte familiar.

Cabe mencionar que son dos los teoremas atribuidos a Tales en relación a la geometría clásica. El que estudiaremos ahora nos dirá cómo construir un triángulo semejante a uno dado. El segundo será tema de otra lección.

Primer teorema de Tales

Si dos rectas transversales son cortadas por una familia de rectas paralelas, los segmentos en las transversales limitados por las paralelas son proporcionales.

El teorema menciona a una familia de rectas paralelas, es decir, puede haber dos o más rectas paralelas. Veamos un ejemplo con base en la siguiente construcción.

El teorema afirma que: si L_1, L_2 son dos rectas transversales intersectadas por tres rectas paralelas; entonces para los puntos de intersección $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ de las paralelas con las respectivas transversales, se cumplen las siguientes igualdades

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_1A_3}{B_1B_3}$$

Observación 1. Por un abuso de notación con A_1A_2 estamos representando la longitud del segmento formado por A_1 y A_2. Para que al expresar los cocientes de las igualdades anteriores se resalte el hecho de que los segmentos correspondientes, son proporcionales entre sí (Fig. 3.13).

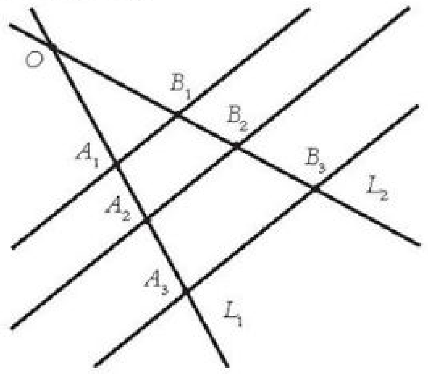


Fig. 3.13 ¿Los segmentos son proporcionales?

Observación 2. Si una de las rectas paralelas de la familia pasa por el punto O de intersección entre las transversales (ver Fig. 3.14), entonces también serían válidas las siguientes igualdades:

$$\frac{OA_1}{OB_1}=\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{OA_2}{OB_2}$$

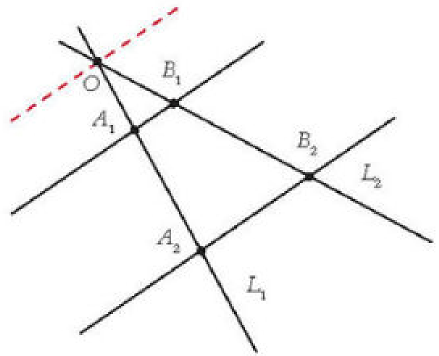


Fig. 3.14 ¿Son válidas las igualdades?

Todo lo anterior en virtud del teorema mismo. Interesante, ¿no lo crees?

Actividad individual

Seguramente recordarás cómo construir una recta paralela a una recta existente. Esto es lo que necesitas para construir un triángulo semejante a uno dado, también debes conocer el teorema de Tales (Fig. 3.15).

- Dibuja en tu cuaderno un triángulo cualquiera ΔABC.
- En su interior traza una recta que sea paralela a uno de sus lados e interséctala con los dos lados restantes, digamos que L y M son los puntos en las intersecciones.

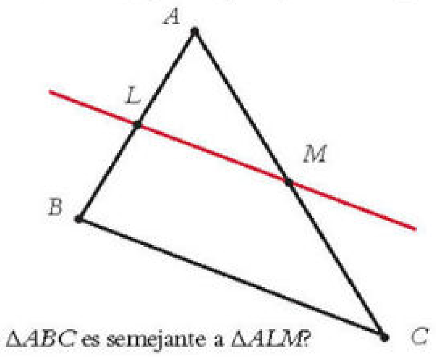


Fig. 3.15 Teorema de Tales.

- ¿El triángulo ΔABC es semejante a ΔALM?

- ¿Por qué?

(*Sugerencia*. Utiliza los criterios de semejanza entre triángulos).

- Comparte tu trabajo con el resto del grupo y con tu docente.

Ahora, ya aprendiste otra forma de construir triángulos semejantes entre sí. Indirectamente, si sabes que cierto par de triángulos son semejantes o no, podrás determinar si dos rectas son paralelas o no (ver Fig. 3.16). Pero la semejanza no sólo alude a una relación geométrica, también a una aritmética. Y es esta última la que aprovecharás al momento de resolver los siguientes problemas.

Si ΔABC no es semejante a ΔAML, las rectas por LM y BC no pueden ser paralelas.

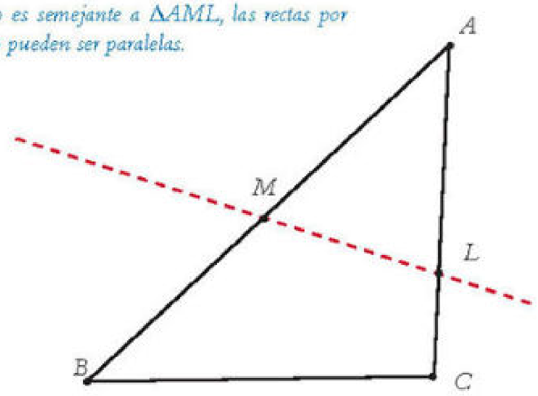


Fig. 3.16 ¿Cómo podemos determinar si dos rectas son paralelas?

Actividad en parejas

En una lección pasada hablamos sobre la diferencia entre medir y calcular. Ahora surge una situación análoga.

Supón que se quiere dividir un segmento AB en n partes iguales, para ello tus herramientas son una regla y un compás.

Si la longitud del segmento AB fuera un múltiplo entero de n, la solución sería muy simple. Por ejemplo, si el segmento AB mide 30 cm y $n = 5$, es decir, queremos dividir AB en cinco partes iguales: todo lo que tendrías que hacer es tomar tu compás y trasladar seis veces sobre el segmento una longitud de cinco centímetros. ¡Y listo!

Pero, ¿qué harías si AB mide 55 cm y $n = 3$? ¿Calcularías $\frac{55}{3}$, medirías 18.33333… centímetros con el compás y trasladarías esa longitud al segmento AB? ¿Crees que sea práctico? Peor aún, ¿resultará exacto? ¡Imagina que eres un ingeniero aeronáutico y que de la exactitud de tus trazos dependen los cálculos para modelar un nuevo avión!

Lo que necesitas es hacer una construcción que genere la división del segmento de forma exacta. Al llevarlo al papel y dibujarlo obtendrás un resultado casi perfecto, pues objetos como tu libreta, lápiz y regla tienen muchas irregularidades: por ejemplo, el grafito del lápiz no termina en una punta perfecta y en escala microscópica tu regla es tan recta como una carretera llena de curvas.

Aun así, lo importante será tu argumentación geométrica pues a partir de ella otros modelos pueden desarrollarse. Así se construye un camino entre teoría y aplicación.

Volvamos a nuestro caso general. Dibuja en tu cuaderno un segmento AB de longitud arbitraria. Queremos dividir este segmento en $n = 5$ partes iguales —lo que haremos sirve para cualquier número n: traza una recta auxiliar L que pase por A y que no sea perpendicular al segmento AB. Luego, con una apertura m del compás que sea menor a AB, y a partir del punto A sin que los segmentos generados se sobrepongan, traslada $n = 5$ veces esa distancia sobre la recta L. Y sea D el extremo final del último segmento de longitud m sobre la recta L.

Debes tener algo similar a lo que ves en la figura 3.17:

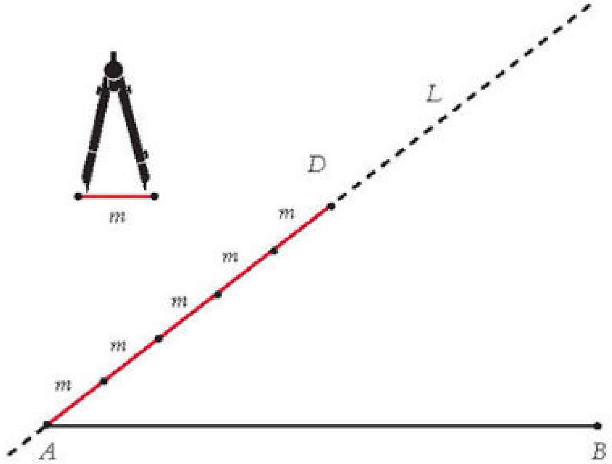


Fig. 3.17 Reproduce la figura en tu cuaderno.

Luego traza la recta que pasa por D y por B. Y por cada uno de los restantes cuatro puntos marcados sobre la recta L construye una recta paralela a DB, y marca su intersección con el segmento AB (Fig. 3.18).

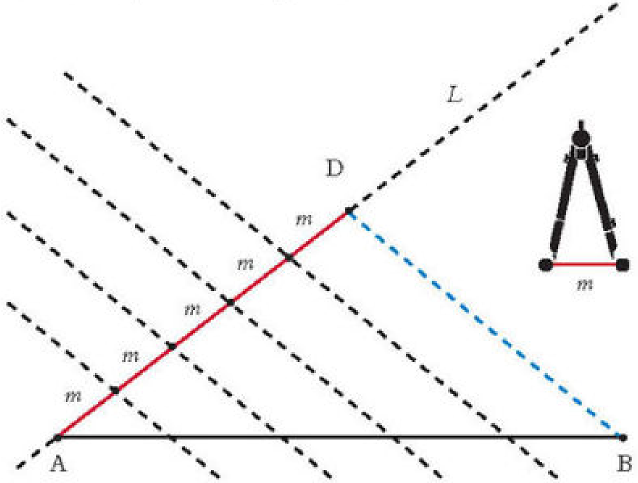


Fig. 3.18 Reproduce los trazos en tu cuaderno.

ESFINGE

Has logrado dividir el segmento AB en cinco partes. ¿Medirán lo mismo?

Por construcción, las rectas que intersectan a las transversales AB, AD y pasan por los respectivos puntos un segmento con los del otro son paralelas. Luego por el teorema de Tales: los segmentos correspondientes en las transversales limitados por las paralelas son proporcionales, es decir:

$$\frac{m}{P_1}=\frac{m}{P_2}=\frac{m}{P_3}=\frac{m}{P_4}=\frac{m}{P_5}$$

¡Esto sólo puede ser si $m > 0$, o si $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5$!

Por construcción $m > 0$ y dado que los cinco cocientes $\frac{m}{P_i}$ son iguales entre sí, podemos suponer que su valor es la constante k, de modo que cada uno de ellos satisface la igualdad:

$$\frac{m}{P_1}=k$$

Por despejes simples vemos que $P_1 = \frac{m}{k}$ (para $P_1 = 1, 2, 3, 4, 5$).

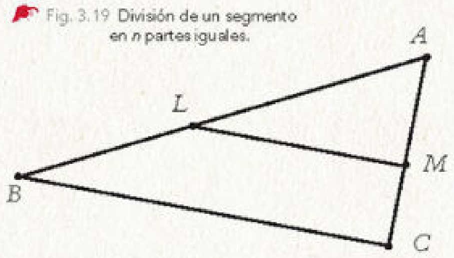
En resumen, hemos demostrado que los cinco segmentos así construidos sobre AB, miden exactamente lo mismo.

Ejercicios y aplicaciones

Practica lo que aprendiste y resuelve los siguientes ejercicios, primero de manera individual; al terminar, asóciate con otro estudiante y juntos repasen los procedimientos y razonamientos seguidos en cada caso.

1. Utilizando lo aprendido en la actividad anterior, elabora en tu cuaderno la división de un segmento AB en n partes iguales, donde (Fig. 3.19):
   - $|AB| = 12.5$ cm y $n = 7$
   - $|AB| = 9$ cm y $n = 4$
   - $|AB| = 11$ cm y $n = 5$

Fig. 3.19 División de un segmento en n partes iguales.

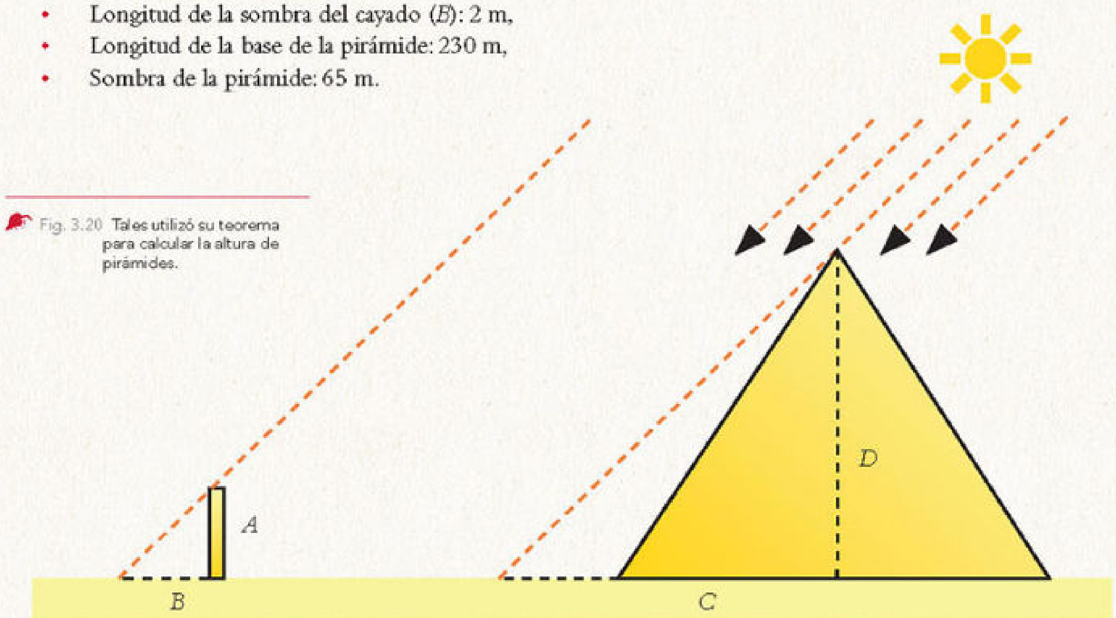


2. Para el triángulo ΔABC (ver Fig. 3.19) se cumple que $BC || LM$,
   - Calcula $|MC|$ si $|AB| = 24$, $|AL| = 9.25$ y $|AM| = 7.5$
   - Calcula $|AB|$ si $|AM| = 214$, $|MC| = 81.9$ y $|AL| = 89$
   - Calcula $|AL|$ y $|LB|$ si $|AM| = 45.7$, $|MC| = 17.4$ y $|AB| = 72.25$
   - Calcula $|AC|$ si $|AL| = 99$, $|LB| = 16.9$ y $|LM| = 12.28$

3. Dado un triángulo ΔABC, sean L el punto medio de AB y M el punto medio de AC. Aplicando el teorema de Tales argumenta y explica por qué el segmento LM es paralelo a BC.

4. Según narra la historia, Tales utilizó su teorema para medir la altura de la pirámide de Keops (Fig. 3.20). La forma en que lo hizo fue medir primero la base de la pirámide y la longitud de su cayado (bastón). Luego, a la misma hora del día, midió la sombra que proyectaba la pirámide y la sombra de su cayado mientras lo sostenía verticalmente con el extremo inferior en contacto con el piso. Con esto obtuvo los siguientes datos:
   - Altura del cayado (A): 1.63 m,
   - Longitud de la sombra del cayado (B): 2 m,
   - Longitud de la base de la pirámide: 230 m,
   - Sombra de la pirámide: 65 m.

Fig. 3.20 Tales utilizó su teorema para calcular la altura de pirámides.



A partir de esto Tales pudo calcular que:

$$C = 65\text{ m} + \frac{230\text{ m}}{2} = 180\text{ m}$$

Conociendo A, B y C tuvo los elementos necesarios para aplicar su teorema. ¡Termina el trabajo de Tales y calcula el valor de D!

5. Apoyados por su docente, organicen una dinámica a escala grupal para revisar los procedimientos seguidos en cada ejercicio, esclarecer las dudas y arribar a conclusiones comunes.

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Figuras y cuerpos.

Actividad individual

Conocimientos previos

En esta lección echaremos mano de los conceptos de congruencia y semejanza de triángulos así como los respectivos criterios; además de la existencia y aplicaciones del teorema de Tales.

- Observa con atención las siguientes imágenes (Fig 3.21):

Fig. 3.21 ¿Son semejantes las imágenes?

Sabías que...

Homotecia es una palabra compuesta de dos elementos de origen griego, el prefijo homo por «similar» y thésis por «posición». Este fue el término que el matemático francés Michel Chasles (1793 – 1880) inventó (en sus trabajos de geometría proyectiva), para referirse a la correspondencia entre dos figuras con la misma forma y una misma orientación (Fig. 3.22).

Fig. 3.22 Michel Chasles.

Semejanza y homotecia

- ¿Observas alguna diferencia entre estos dos paisajes?

Posiblemente logres apreciar más detalles en una de las dos imágenes, justo en la que es más grande. En realidad la única diferencia es la escala pues, ambas tienen la misma forma.

- ¿Qué harías para comprobar si dos figuras son la misma, es decir, si son congruentes?

Lo más simple sería tratar de colocar convenientemente una figura sobre la otra y ver si coinciden en cada punto. Si coinciden exactamente las figuras serían iguales, es decir, congruentes.

En geometría esto se hace mediante una transformación que preserve la forma y el tamaño. Dichas transformaciones son conocidas como isometrías o transformaciones rígidas. Así, dos figuras serán congruentes (iguales) si existe una transformación de este tipo que lleve una en la otra.

Anteriormente viste que las traslaciones son transformaciones rígidas. Un hecho importante de las traslaciones es que también preservan la orientación, es decir, al trasladar una figura ésta no se rota ni se refleja.

- ¿Qué puedes hacer para saber si dos figuras son semejantes o no? Explica tu respuesta.
- Considera las figuras anteriores (Fig. 3.21) y observa lo siguiente (Fig. 3.23).
- ¿Son semejantes ambas imágenes? ¿Cómo lo sabes?
- Comenten en grupo y lleguen a conclusiones comunes con apoyo del docente.

Fig. 3.23 Imágenes superpuestas.

Glosario

Homotecias. Son transformaciones que modifican la escala entre una figura y su imagen conservando siempre la forma.

En esta imagen (ver Fig. 3.22) se evidencia que tratar de compararlas sólo mediante una transformación rígida no es suficiente para determinar si las figuras tienen la misma forma, es decir, si son semejantes o no.

Aunque parecen ser iguales entre sí, ¿cómo puedes asegurarlo? Es aquí donde un nuevo tipo de transformaciones nos permitirán correlacionar figuras de diferente tamaño o escala, pero con una misma forma y una misma orientación: las **homotecias**.

Sin importar su orientación, dos figuras serán semejantes si existe una transformación rígida tal que seguida de una homotecia (un cambio de escala) lleve una de las figuras en la otra.

Habrás notado que para todas las transformaciones que hemos estudiado siempre hay una construcción geométrica implícita. Por ejemplo, las traslaciones implican moverse en una dirección por una distancia dada; las de rotación significan girar con centro en un punto y ángulo dado; las reflexiones consisten en proyectar un conjunto de puntos con respecto a una recta dada. Interesante, ¿no lo crees así?

¿Recuerdas qué objetos geométricos quedaban fijos en el plano después de aplicar una rotación o una reflexión e incluso una traslación? El centro de rotación, el eje o centro de reflexión y bajo la traslación, todo se mueve.

En cada caso los puntos que permanecen inmóviles bajo una trasformación son conocidos como el conjunto invariante de la transformación.

Actividad en parejas

Trabajen en parejas lo que se indica a continuación.

- Dibujen en su cuaderno el siguiente triángulo ΔABC (Fig. 3.24).
- A partir de este triángulo: ¿qué harían para construir un triángulo semejante $\Delta A'B'C'$? Expliquen al grupo su estrategia.

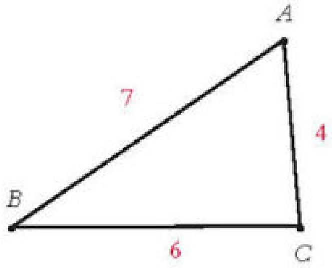


Fig. 3.24 Tracen en sus cuadernos.

Pueden intentar dibujar un triángulo semejante del siguiente modo: a partir de la definición de semejanza, para que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ sean semejantes debe ocurrir que sus lados correspondientes sean proporcionales entre sí, es decir, que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{B'A'}{CA}$$

Si esto ocurre, claramente los tres cocientes anteriores son constantes pues son iguales entre sí. Sea K ese valor constante, se le conoce como la razón de proporción del triángulo $\Delta A'B'C'$ con respecto al triángulo ΔABC.

Observa que si:

$$\frac{A'B'}{AB} = K$$

Entonces:

$$A'B' = K\,(AB)$$

Es decir: si multiplicamos las longitudes de los lados del triángulo ΔABC por la constante K, el triángulo resultante será semejante al primero. En efecto, supongamos que $K = 2$, luego los siguientes triángulos son semejantes (Fig. 3.25).

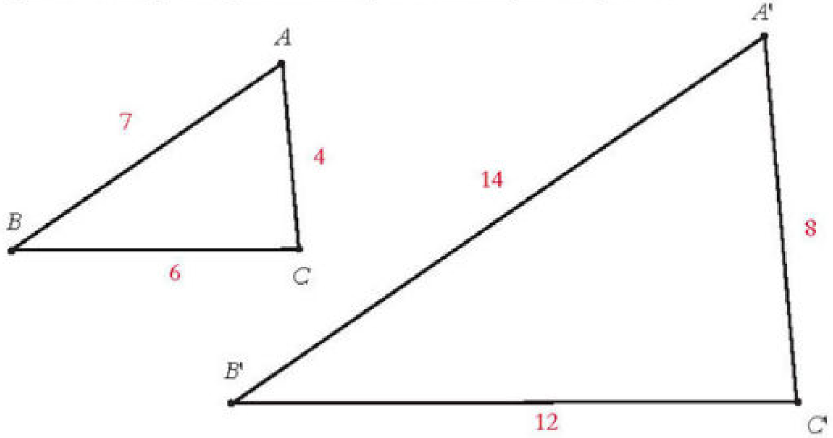


Fig. 3.25 ¿Son semejantes los triángulos?

Sin embargo, esta representación sólo es válida en el sentido numérico si suponemos que los lados del nuevo triángulo miden lo que está indicado.

El problema se complica por el hecho de que el dibujo anterior no es consistente, ya que no tenemos ningún argumento geométrico que lo sostenga.

Por ello el problema se debe replantear así: geométricamente y no numéricamente.

- ¿Cómo construir un triángulo semejante con ΔABC?
- Discutánlo con otra pareja y compartan con el grupo y con el docente su respuesta. Expongan el procedimiento que seguirían.

Actividad grupal

En grupo retomen el ejemplo del triángulo ΔABC de la Fig. 3.25 y elaboren en su cuaderno paso a paso la siguiente construcción:

- Dibujen un punto O fuera del triángulo ΔABC.
- Sean L_1, L_2 y L_3 las rectas que pasan por el punto O y por los respectivos vértices A, B y C del triángulo.

- Sea A' un punto distinto de A, sobre la recta L_1.
- Sea B' el punto en L_2 tal que $A'B' || AB$.
- Sea C' el punto en L_3 tal que $B'C' || BC$.
- Traza los segmentos $A'B'$, $B'C'$ y $C'A'$.
- Observen que (ver figura 3.26):

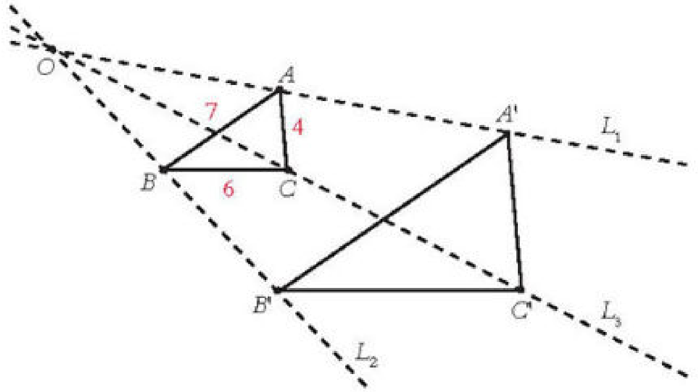


Fig. 3.26 Reproduzcan los trazos en el pizarrón.

1. Por construcción:
   - Los vértices del triángulo $\Delta A'B'C'$ son distintos a los de ΔABC.
   - Los lados $A'B'$ y $B'C'$ del triángulo $\Delta A'B'C'$, son paralelos respectivamente a los lados AB y BC del triángulo ΔABC.
   - No sabemos si el lado $A'C'$ es paralelo al lado AC.

- Aplicando lo que ya saben sobre triángulos semejantes, ¿qué pueden deducir de la construcción?

2. Como $A'B' || AB$, si aplican el teorema de Tales, tendran que los triángulos ΔOAB y $\Delta OA'B'$ son semejantes. En efecto, el teorema asegura que los segmentos en las transversales L_1 y L_2, limitados por las paralelas $A'B'$ y AB son proporcionales. Luego por el criterio de semejanza LAL, concluyan la semejanza de los triángulos.

3. Análogamente al razonamiento anterior, tendrán que los triángulos ΔOBC y $\Delta O'B'C'$ son semejantes.

4. De los dos incisos anteriores, se sigue que los segmentos AB y $A'B'$ son proporcionales, de igual manera lo serán BC y $B'C'$. Además del paralelismo entre ellos se desprende que los ángulos $\measuredangle CBA$ y $\measuredangle C'B'A'$ son iguales.

5. Luego, por el criterio de semejanza LAL, los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes. Por esta razón los lados AC y $A'C'$ son proporcionales, además de los incisos (1) y (2) se sigue la semejanza de los triángulos ΔOAC y $\Delta OA'C'$, así del recíproco del teorema de Tales pueden asegurar que $A'C' || AC$.

- Resumiendo: ¿han construido un triángulo $\Delta A'B'C'$ semejante a ΔABC? ¿Cómo lo saben?
- ¿Los lados correspondientes son paralelos? ¿Cuál propiedad adicional describe esta característica? Coméntenlo en grupo.

Cuando ocurre el paralelismo entre lados correspondientes de triángulos semejantes, decimos que los triángulos tienen la misma orientación.

La construcción vista también es una transformación porque establece una correspondencia entre ambas figuras llevando el triángulo ΔABC en $\Delta A'B'C'$.

¿Será del tipo de las transformaciones rígidas?

Ahora nos gustaría extender la definición de semejanza a cualquier par de polígonos.

Glosario

Polígonos semejantes. En geometría dos polígonos con el mismo número de lados son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales.

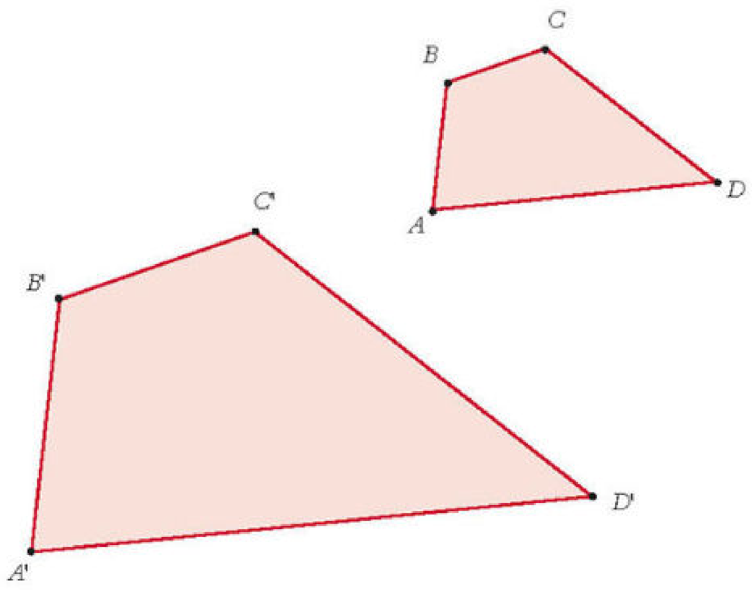


Fig. 3.27 ¿Qué condiciones se deben cumplir para que los polígonos sean semejantes?

En la figura 3.27 los polígonos $ABCD$ y $A'B'C'D'$, serán semejantes siempre que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{D'A'}{DA} = K$$

y

$$\measuredangle DAB = \measuredangle D'A'B'$$
$$\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$$
$$\measuredangle BCD = \measuredangle B'C'D'$$
$$\measuredangle CDA = \measuredangle C'D'A'$$

Para extender la definición fue necesario pedir la igualdad entre ángulos correspondientes. De otro modo pasarían cosas absurdas como el que los polígonos de la figura 3.28 sean semejantes.

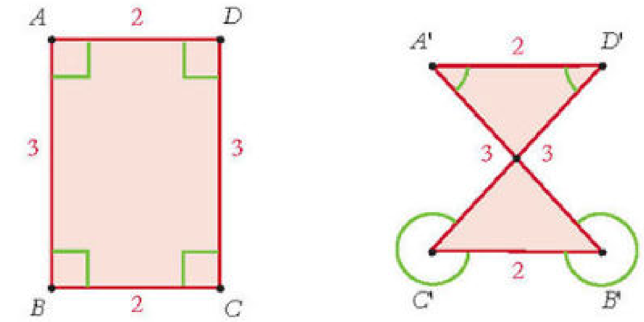


Fig. 3.28 ¿Podrían ser semejantes ambas figuras?

Polígonos homotéticos:
Si mediante rectas L_1, L_2, L_3..., unimos a los vértices $A'B'C'$..., de un polígono cualquiera con un punto O en el plano y si en cada una de estas rectas escogemos respectivamente un punto A', B', C'.., (ver Fig. 3.29) tal que los cocientes:

$$K = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \ldots$$

sean iguales entre sí, entonces los puntos A', B', C'..., son los vértices de un polígono semejante.

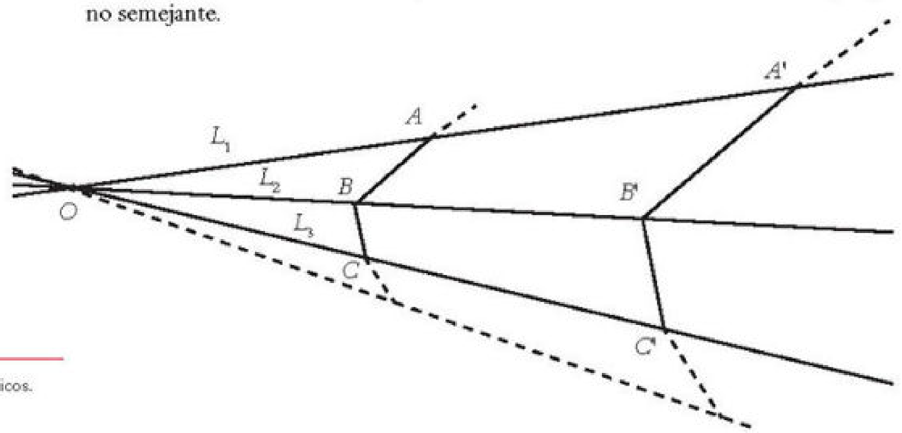


Fig. 3.29 Polígonos homotéticos.

Dos polígonos semejantes así dispuestos se llaman *polígonos homotéticos*: el punto O es su *centro de homotecia* y la constante K es su *razón de homotecia*.

A diferencia de las transformaciones rígidas, las homotecias modifican las distancias.

Dos polígonos semejantes P_1 y P_2 (con la misma orientación o no) siempre guardan una relación de proporcionalidad entre sí.

Es decir, el polígono P_1 será tantas veces más grande que P_2, mientras que el polígono P_2, será tantas veces más pequeño que P_1.

El qué tanto uno es más grande o más pequeño que el otro, depende de dos razones distintas de proporcionalidad que coinciden sólo si los polígonos son congruentes (iguales).

¿Cuáles son estas razones?

1. Una es la proporción K que guarda P_1 respecto de P_2, dada por:

$$K = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \ldots$$

2. La otra es la proporción K' que guarda P_2 respecto de P_1, dada por:

$$K' = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \ldots$$

¿Qué relación hay entre estas dos razones? Una es inversa de la otra.
En efecto, observa los siguientes despejes:

$$\frac{A'B'}{AB} = K$$

$$A'B' = K(AB)$$

$$\frac{1}{K} = \frac{AB}{A'B'}$$

De modo que:

$$K' = \frac{1}{K}$$

Actividad grupal

Mediante una actividad a escala grupal dirigida por el docente, discutan:

- ¿Qué diferencia puede haber entre la razón de homotecia de dos polígonos homotéticos y la razón de proporcionalidad entre dos polígonos semejantes?

(Tomen en cuenta que dos polígonos homotéticos necesariamente son semejantes y no al revés).

Hasta ahora las razones de homotecia han sido números positivos.

- ¿Qué sentido tendría una razón negativa? Observa la figura 3.30:

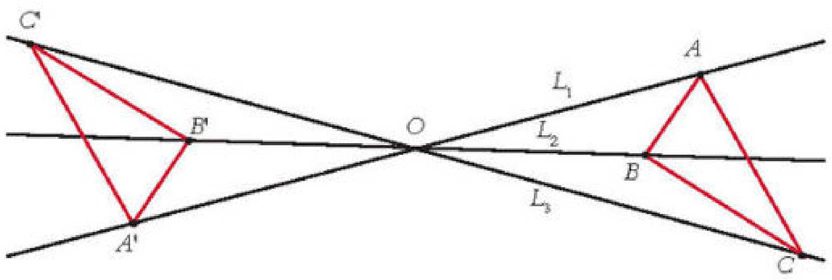


Fig. 3.30 ¿Tendría sentido una razón negativa?

Al construir el triángulo homotético $\Delta A'B'C'$ podríamos iniciar escogiendo un punto A' de la recta L_1 que fuera opuesto por O al punto A. Entonces, B' y C' también serían opuestos por O a B y C respectivamente. ¿Cuál sería entonces la razón K de homotecia del triángulo $\Delta A'B'C'$ con respecto de ΔABC?

Ciertamente sería:

$$K = \frac{OA'}{OA}$$

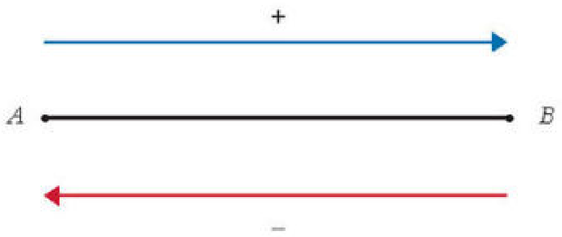
Y es correcto. Sin embargo hay un detalle sutil: ¿$K > 0$ o $K < 0$?

Para responder a esta pregunta, primero debemos responder a otra: ¿será lo mismo ir de tu casa a la escuela, que ir de la escuela a tu casa? ¿Es lo mismo recorrer un segmento AB en una dirección que en otra?

Si el camino es el mismo la dirección del recorrido no lo es. Por esta razón, y para indicar esa diferencia, en geometría tenemos la siguiente convención: si el segmento a recorrer está dado por los puntos A y B, al escribir AB estamos asumiendo que recorremos el segmento con la dirección del punto A al punto B; en cambio si escribimos BA, el segmento se recorre a la inversa, es decir del punto B al punto A.

Finalmente, acostumbramos referirnos al sentido AB como el *positivo* y a BA como el sentido *negativo*. Por ello, la longitud del *segmento dirigido* AB será un número positivo, mientras que la del segmento dirigido BA un número negativo.

Fig. 3.31 Acostumbramos referirnos al sentido AB como el positivo y a BA como el sentido negativo.



Por lo que, en la razón de homotecia de la construcción anterior (ver figura 3.31):

$$K = \frac{OA'}{OA}$$

Veremos que $OA' < 0$ y $OA > 0$. Por lo tanto $K < 0$, al ser el cociente de un número negativo y de uno positivo.

Actividad individual

Trabaja de manera individual:

- Dibuja en tu cuaderno un triángulo ΔABC y un punto O fuera de él.
- Traza un triángulo $\Delta A'B'C'$ que sea homotético a ΔABC,
  - con una razón de homotecia de -2
  - con una razón de homotecia de $\frac{1}{2}$
  - con una razón de homotecia de 0
  - con una razón de homotecia de 1
- En cada caso observa la posición que guardan los vértices de $\Delta A'B'C'$ con respecto de O y de los respectivos vértices de ΔABC.
- Comparte tu trabajo con el grupo y con el docente.

Actividad en parejas

Organizado en parejas, resuelvan lo siguiente:

- Dibujen un triángulo ΔABC y un punto O fuera de él (Fig. 3.32).
- Tracen un triángulo $\Delta A'B'C'$ que sea homotético a ΔABC, luego construyan otro triángulo $\Delta A''B''C''$ que sea homotético a $\Delta A'B'C'$ y distinto de ΔABC.

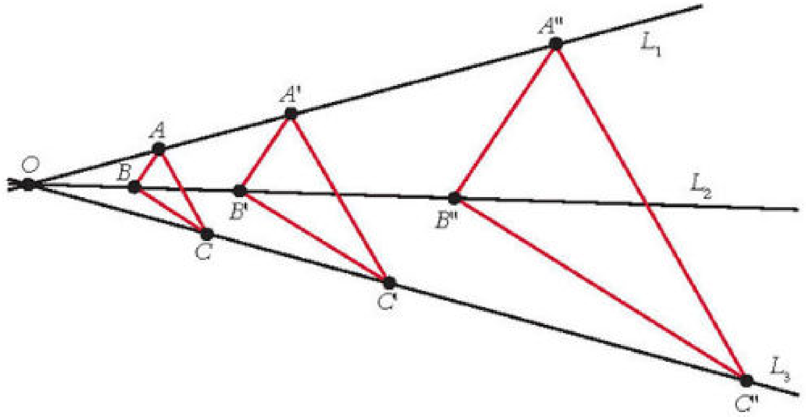


Fig. 3.32 Reproduzcan los trazos en sus cuadernos.

- ¿El triángulo $\Delta A''B''C''$ será homotético a ΔABC? Si es así, entonces: ¿qué razón de homotecia tendrá el triángulo $\Delta A''B''C''$ con respecto de ΔABC?
- Comenta tus respuestas con el resto del grupo bajo la guía del docente.

Recuerda

Por regla general, si los vértices del triángulo homotético $\Delta A'B'C'$ son opuestos a los de ΔABC con respecto de O, entonces la razón de homotecia siempre será negativa.

Pero si los vértices de $\Delta A'B'C'$ permanecen entre los de ΔABC y 0, entonces la razón será menor que uno, y sólo en el caso de que los vértices de uno coincidan con los del otro la razón será igual a uno. Y naturalmente, mayor que uno si los vértices de ΔABC quedan entre los vértices de $\Delta A'B'C'$ y O.

En la construcción, las respectivas razones de homotecia son las siguientes:

$$K_1 = \frac{OA'}{OA}$$

$$K_2 = \frac{OA''}{OA'}$$

$$K_3 = \frac{OA''}{OA}$$

De la segunda igualdad se tiene que $OA'' = K_2(OA')$, y si sustituimos este valor en la tercera igualdad, obtenemos que:

$$K_3 = \frac{K_2(OA')}{OA} = K_2\left(\frac{OA'}{OA}\right) = K_2(K_1)$$

Es decir: la razón K_3 del tercer triángulo con respecto del primero es igual al producto de las dos razones anteriores K_2 y K_1, siempre que las homotecias posean el mismo centro O de homotecia.

A la homotecia del triángulo $\Delta A''B''C''$ con respecto de ΔABC, se le conoce como la *composición* de la homotecia del triángulo $\Delta A'B'C'$ respecto del primero, seguida de la homotecia del triángulo $\Delta A''B''C''$ respecto del segundo.

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

Eje: Manejo de la información.

Tema: Proporcionalidad y funciones.

Actividad individual

Conocimientos previos

Una compañía telefónica cobra una renta mensual de $ 100 y $ 5 por minuto de llamada. Completa la tabla 3.3:

Tabla 3.3

Tiempo (*min*)	1	2	3	4	5	6	7	20
Costo ($)								

Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Al aumentar el tiempo que uno habla, el costo aumenta en la misma proporción?
- ¿Qué tipo de relación existe entre las dos variables?
- ¿Qué expresión algebraica modela esta situación?
- ¿Cuál fue el procedimiento que utilizaste para obtener la expresión algebraica?
- Grafica en tu cuaderno los valores de la tabla 3.3 para ver qué relación existe entre el tiempo y el costo.
- Comenta tus respuestas con tus compañeros y tu profesor.

Actividad en parejas

Organicen parejas de trabajo para resolver el siguiente problema:

En el rancho de José hay un pozo que ya no tiene agua y quiere saber qué profundidad tiene éste. Decide tirar una moneda y con ayuda de un cronómetro toma el tiempo; advierte que tarda 4 segundos en caer.

- En la tabla 3.4 registró algunos datos. Obsérvenlos con atención:

Tiempo (*seg*)	0	1	3	4
Distancia (m)	0	4.9	19	

Tabla 3.4

Respondan las preguntas en su cuaderno y realicen las propuestas que les pueden ayudar a resolver la actividad.

- ¿La relación que existe entre las variables es proporcional? Expliquen por qué.
- ¿Hay alguna cantidad que sea constante? ¿Cuál es? Descríbanla.

Construir una gráfica les ayudará a conocer qué tipo de función está involucrada en esta situación y así podrán determinar el resultado fácilmente.

- ¿Qué procedimiento seguirían para determinar la función que modela la situación? Descríbanlo paso a paso.
- Expongan y comenten con el profesor los diferentes procedimientos para resolver la actividad.
- Escriban en el pizarrón las conclusiones que alcanzaron para hacerlas del conocimiento del resto del grupo.

La representación gráfica de funciones sirve para resolver ecuaciones, ya que al representarlas gráficamente su solución está dada por los puntos en los que la ecuación corta al eje de las abscisas.

Otra de sus aplicaciones es que puedes visualizar fácilmente los puntos máximos o mínimos de la **función**.

En la lección 3.4 aprendiste qué hacer para resolver un problema en el cual dos magnitudes están relacionadas:

- Ahora construye una tabla de valores con el fin de organizar los datos mediante pares ordenados, y analizar cómo es la relación entre las dos variables.

Glosario

Función. En una función se relacionan dos variables, en donde el valor de la variable dependiente (y) está en función del valor de la variable independiente (x).
$y = x^2$; si $x = 3$ entonces $y = 3^2$, $y = 9$.

De acuerdo con la tabla 3.5, los pares ordenados son los siguientes:

t	d	(t,d)
0	0	(0,0)
1	4.9	(1,4.9)
2	19.6	(3,19)

Tabla 3.5

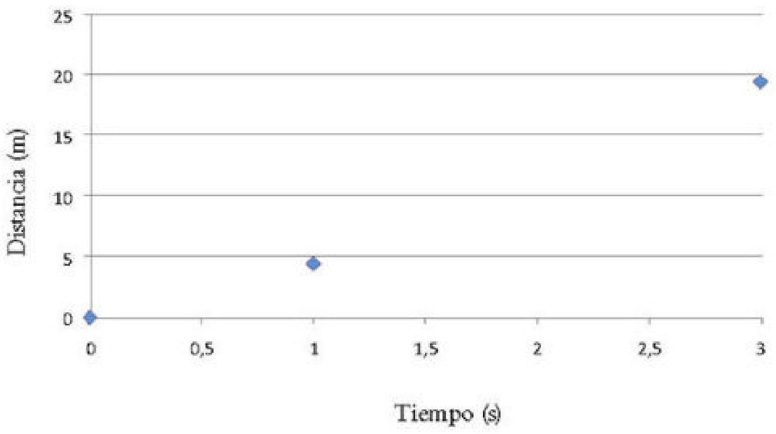


Fig. 3.33 Pares ordenados.

Une los puntos de la figura 3.33 y compárala con la que trazaste en tu cuaderno.

- ¿Qué tipo de gráfica es?
- Observa la gráfica. ¿Puedes anticipar qué profundidad tiene el pozo si la moneda tardó 4 segundos en caer?
- Comenta con el grupo la diferencia que hay entre la figura 3.33 y la gráfica que construiste con los valores de la tabla 3.5.
- Escriban sus conclusiones en el pizarrón, bajo la guía de su docente, para que todo el grupo tenga conocimiento.

Las *expresiones algebraicas* con dos variables de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ siempre muestran una parábola y su forma depende de los valores que tenga cada uno de los términos a, b, c.

¿Cómo determinar la función cuadrática que modela un fenómeno?

Actividad individual

Trabaja de manera individual para resolver el siguiente problema.
A un orfebre le encargaron algunas piezas para adornar la entrada de un museo. La tabla 3.6 muestra la cantidad de piezas que entregaría por día.

Días (x)	0	1	2	3	4	5	...	x
No. de piezas (y)	0	2	8	18	32	50	...	
1a. diferencia		2	6	10	14	18		
2a. diferencia			4	4	4	4		

Tabla 3.6

Primero observa la diferencia que existe entre términos consecutivos del número de piezas (y). Al no ser constante la primera diferencia, el problema no representa una situación lineal de la forma $y = mx + b$.

La segunda diferencia sí es constante, se trata de una función cuadrática de la forma $y = x^2 + bx + c$, en donde x = número de días, y = número de piezas.

Para conocer los valores de a, b y c, selecciona dos valores ordenados de la tabla anterior y forma un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

$$y = ax^2 + bx + c,$$

Para $x = 0$	$0 = a(0)^2 + b(0) + c$	por lo tanto	$c = 0$
Para $x = 1$	$2 = a(1)^2 + b(1) + 0$	por lo tanto	$2 = a + b$
Para $x = 2$	$8 = a(2)^2 + b(2) + 0$	por lo tanto	$8 = 4a + 2b$

Las dos ecuaciones que tienes las puedes resolver por cualquiera de los métodos para sistema de ecuaciones y así obtener los valores de a, b y c.

$a + b = 2$ ecuación 1
$4a + 2b = 8$ ecuación 2

- ¿Cuáles son esos valores?
- a=__________ b=__________ c=__________
- ¿Cuál sería la ecuación cuadrática que modela esta situación?

Resuelve la ecuación por el método que más te convenga y elige cuál de las siguientes expresiones algebraicas es la que representa este problema

$y = x^2$ $\quad$ $y = 2x$ $\quad$ $y = 2x^2$

Una vez que se obtiene la función cuadrática puedes calcular cuantos términos necesites.

La siguiente gráfica representa los valores de la tabla 3.6 (Fig. 3.34).

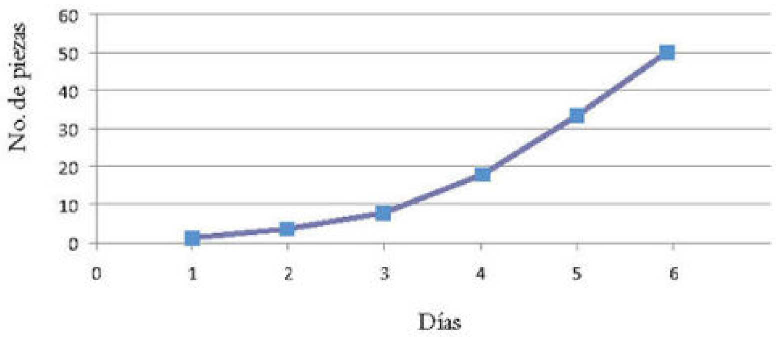


Fig. 3.34 Relación entre el modelo de la artesanía y el número de piezas de mosaico.

Que una parábola tenga sus ramas hacia arriba (ax^2) o hacia abajo ($-ax^2$) depende del signo que posee el término a.

- Con base en la figura 3.33, escribe en tu cuaderno cuántas piezas entregó el orfebre en el octavo día.
- Compara la función cuadrática que obtuviste en la actividad en donde hay que medir la profundidad del pozo.
- En caso de que no hayas llegado al resultado correcto, inténtalo nuevamente. Sigue el último procedimiento.
- Al terminar, compara tus resultados con los de otros estudiantes; lleguen a conclusiones comunes con el apoyo de su docente.

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve los siguientes problemas, primero de manera individual; al terminar, reúnete con otro estudiante para revisar tu trabajo y exponer tus argumentos.

1. El precio de venta de un artículo que genera la ganancia máxima está representado por medio de la ecuación $y = -22x^2 + 260x - 100$. La gráfica es la siguiente (Fig. 3.35):

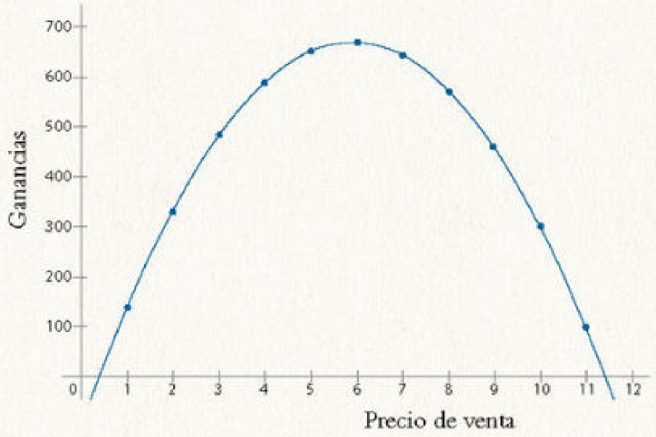


Fig. 3.35 Relación entre precio de venta y ganancias.

Responde las siguientes preguntas en tu cuaderno:

- ¿Entre qué valores debe estar el precio de venta (x) para que haya ganancias?
- ¿Por qué la parábola no pasa por (0,0)?
- Si el precio de venta del artículo es de 20 pesos, ¿qué ganancia se genera?
- ¿Cuál es el precio de venta que origina la máxima ganancia?
- Una ganancia de 400 pesos, ¿a qué precio de venta corresponde?
- Elabora una tabla de valores y compárala con la gráfica.
- No olvides escribir tus conclusiones.

2. Luis quiere definir las medidas de un rectángulo de área máxima con un perímetro constante de 24 cm.

La siguiente tabla muestra los valores enteros entre los que se ubica el área máxima.

Base (*cm*)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Área (*cm*)	0	11	20	27	32	35	36	35	32	27	20	11	0

Tabla 3.7

Resuelve y responde en tu cuaderno lo que se te pide:

- Comprueba que el problema involucra una función cuadrática.
- Encuentra la representación algebraica que modele este problema.
- Construye la gráfica relacionada con la tabla 3.7.
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto máximo de la parábola?
- ¿Entre qué valores de la base se encuentra el área máxima del rectángulo?
- ¿Qué valores son los que representan el área máxima?
- ¿Cuál es la figura que representa el área máxima? ¿Por qué?

3. Daniel lanza una pelota desde el suelo hacia arriba (ver Fig. 3.36).

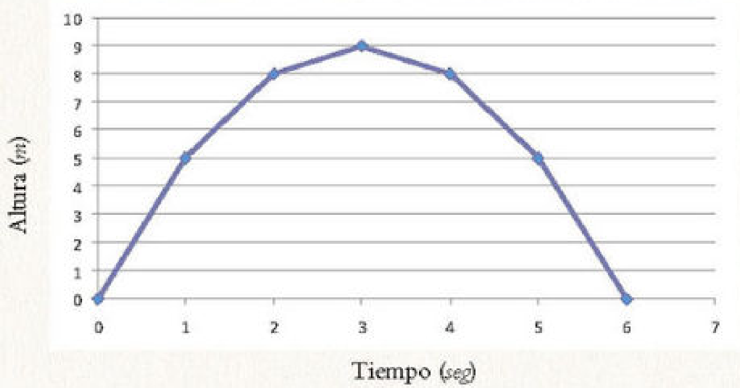


Fig. 3.36 Relación entre tiempo y altura.

Elabora una tabla con los pares ordenados de la gráfica.

- Determina la función cuadrática del problema.
- ¿Cuántos metros de altura alcanzó la pelota?
- ¿A los cuántos metros de altura la pelota cayó al suelo?
- A los 5 m de altura, ¿cuánto tiempo había pasado? Justifica cada una de tus respuestas.

4. Determina la función cuadrática de cada una de las siguientes tablas (3.8 y 3.9) y elabora la gráfica correspondiente en tu cuaderno

a) $f(x)$ =

x	1	2	3	4	5
y	5	8	13	20	29

Tabla 3.8

b) $f(x)$ =

x	1	2	3	4	5
y	–2	–8	–18	–32	–50

Tabla 3.9

5. Escribe sobre la línea la función que corresponde a cada gráfica (Figs 3.37 - 3.40).

a) $3 - 2x^2$ b) $x^2 + 3$ c) $x^2 - 4$ d) $-3x^2$

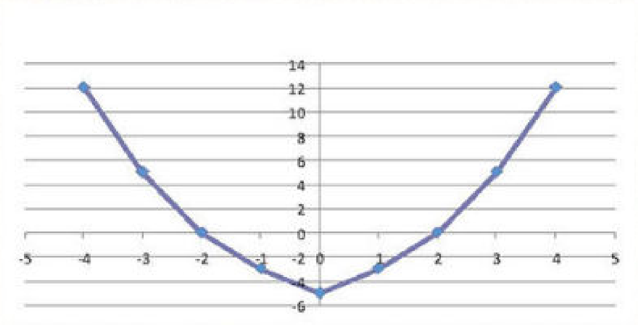


Fig. 3.37 ¿Qué función le corresponde?

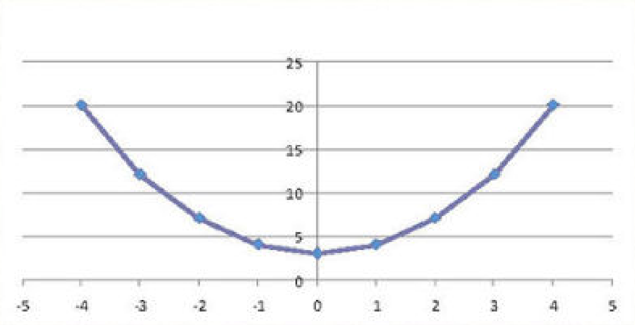


Fig. 3.38 ¿Qué función le corresponde?

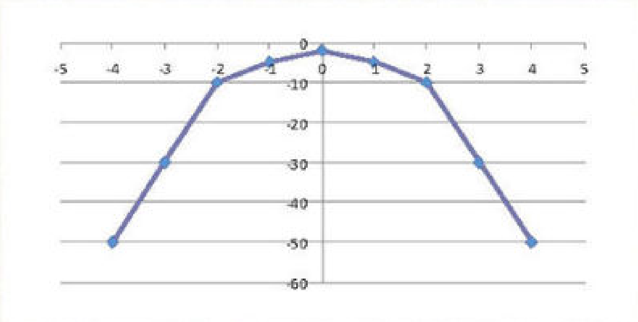


Fig. 3.39 ¿Qué función le corresponde?

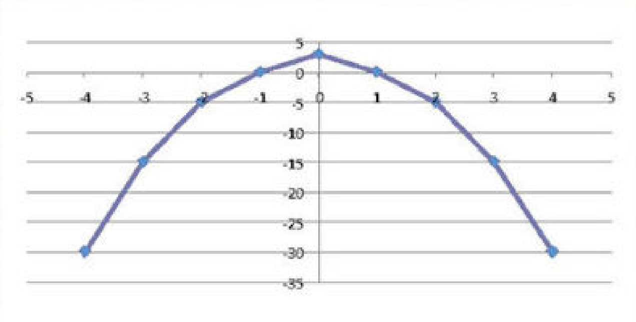
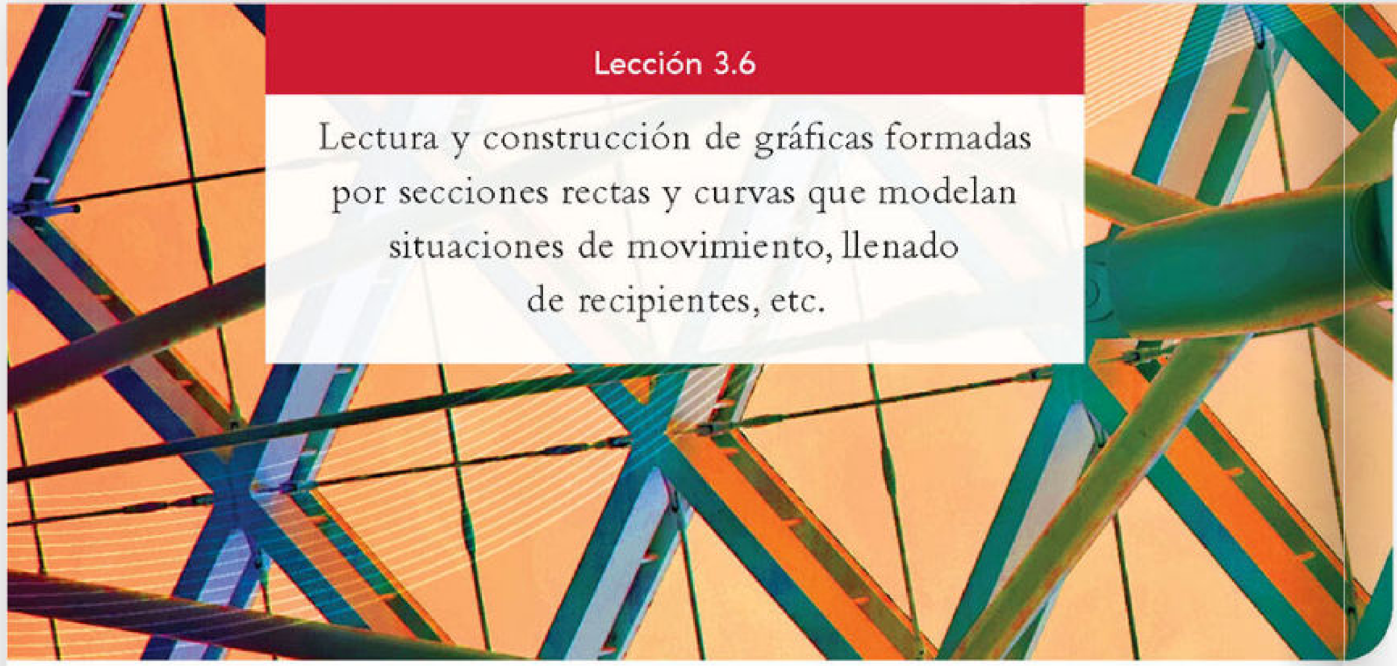


Fig. 3.40 ¿Qué función le corresponde?

6. Apoyados por su docente, organicen una dinámica a escala grupal para revisar los procedimientos seguidos en cada ejercicio, esclarecer las dudas y arribar a conclusiones comunes.



Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etc.

Eje: Manejo de la información.

Tema: Proporcionalidad y funciones.

Actividad individual

Conocimientos previos

Observa la siguiente gráfica (Fig.3.41) y responde en tu cuaderno.

- ¿Cuánto dinero le debe Laura a su mamá?
- ¿Cuántos días tarda en pagarle?
- ¿Cuánto le paga diariamente?
- ¿Qué días la deuda permanece igual?
- ¿Cómo lo sabes? Comenta tus razonamientos con otros estudiantes y con tu docente.

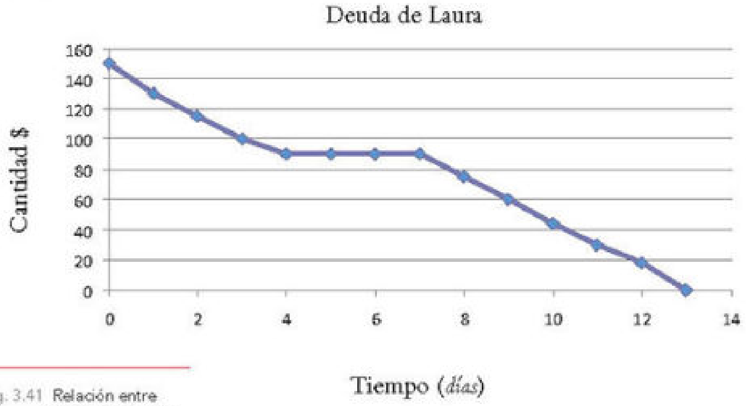


Fig. 3.41 Relación entre cantidad y tiempo.

Actividad en parejas

Trabajen en parejas para resolver el siguiente problema:
Julián y sus amigos hacen un viaje cultural. La siguiente gráfica (Fig. 3.42) representa los kilómetros que recorrieron en autobús desde su salida hasta su llegada al mismo lugar de donde partieron.

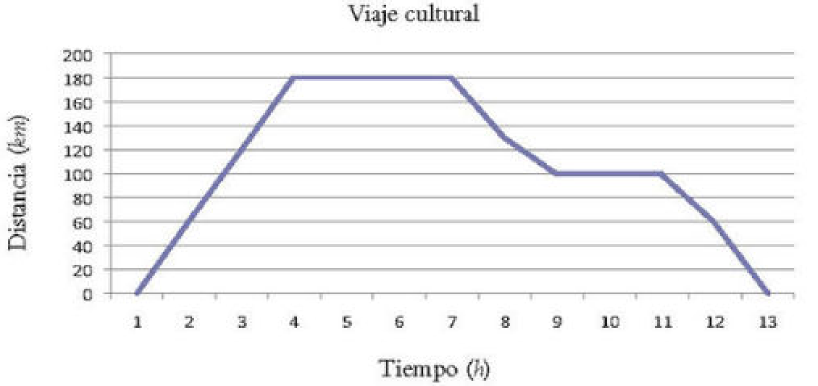


Fig. 3.42 Relación entre tiempo y distancia.

Respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas horas viajaron?
- ¿A cuántas horas estaba el lugar que visitaron?
- ¿Qué indica el primer tramo del viaje?
- ¿Cuántas paradas hicieron?
- ¿A cuánto tiempo equivale cada una?
- ¿Qué significan las diferentes rectas de la gráfica?
- ¿Qué relación existe entre las variables?
- ¿Cada una de las rectas tiene intervalos iguales de tiempo?

- ¿Qué significa que una recta tenga pendiente 0?

- Comparen sus respuestas con las de otras parejas. ¿Encuentran diferencias? Expongan sus argumentos para defender su trabajo. Lleguen a conclusiones comunes con el apoyo de su docente.

En lecciones anteriores estudiaste que cuando existe una relación de proporcionalidad entre las variables, la relación entre éstas es lineal $y = mx + b$, en donde la pendiente (m) y la ordenada al origen (b) son constantes, x es una variable y la gráfica que representa esa situación es una recta.
Cada vez que varía la pendiente se modifica la inclinación de la recta. En la actividad anterior viste que la velocidad del autobús es constante en cada uno de los tramos, por lo tanto, se trata de funciones lineales.

Actividad en equipo

Formen equipos de trabajo para resolver el siguiente problema:
En uno de los lugares arqueológicos que visitaron Julián y sus amigos, había carritos de golf que los transportaban de un lugar a otro ya que las distancias eran muy grandes.
A continuación se muestra la gráfica (Fig. 3.43) en la que se relaciona tiempo con distancia.

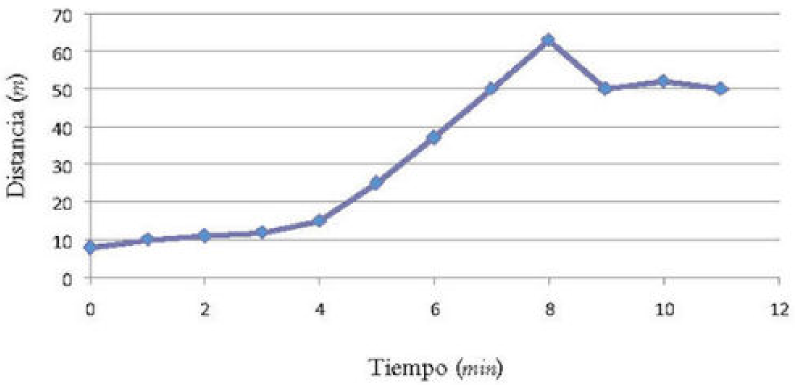


Fig. 3.43 Relación entre tiempo y distancia.

Respondan en su cuaderno las siguientes preguntas, compárenlas a nivel grupal y discutan con el profesor qué representa cada tramo de la gráfica.

- ¿Qué diferencia existe entre esta gráfica y la anterior?
- ¿En qué tramo la velocidad se mantiene constante?
- ¿Existe alguna función cuadrática en alguno de los tramos? ¿En cuál?
- ¿Cómo es la variación en la función cuadrática?
- Comparen sus respuestas con las de otros equipos.

Como puedes observar, las relaciones que existen entre variables no siempre son variaciones lineales en una gráfica. Hay variaciones cuadráticas o de otro tipo, dependiendo el fenómeno que se quiera describir.

En esta gráfica también se observa que en un tramo la distancia se mantiene constante; sin embargo, cuando la función es cuadrática la velocidad no es constante, ya que su variación es acelerada.

Actividad individual

Llenado de recipientes

Resuelve el siguiente problema de manera individual:
Claudia llenó tres floreros con agua y utilizó un mismo vaso para hacerlo. Se le ocurrió trazar una gráfica de llenado para cada recipiente (Fig. 3.44).

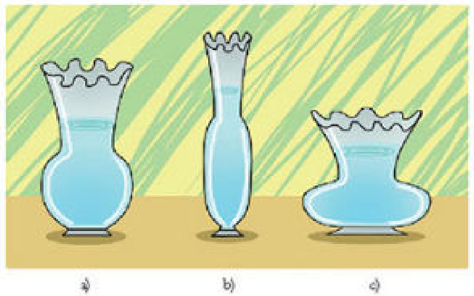
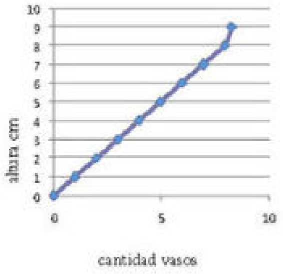
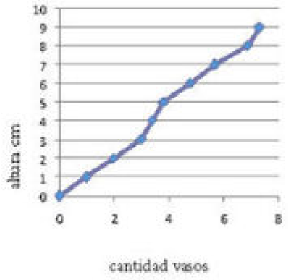
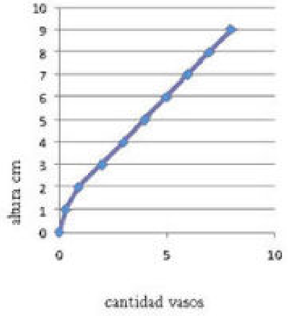


Fig. 3.44 Gráfica de llenado.

Escribe sobre las líneas cuál florero corresponde a cada una de las gráficas.







Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Qué diferencia existe entre cada una de las gráficas?
- ¿Cuál de los tres floreros alcanzó una altura mayor con menos vasos de agua? ¿Por qué?
- ¿Cuál de los floreros tuvo un llenado más constante? ¿Por qué?
- ¿Qué procedimiento elegiste para saber qué gráfica correspondía a qué florero?
- Dibuja en tu cuaderno un florero cuya gráfica hubiera sido solamente una recta. Justifica tu respuesta.

Con base en tu propio dibujo completa la tabla 3.10.

Cantidad de vasos	Altura agua (*cm*)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Tabla 3.10

- De acuerdo con los valores de tu tabla, traza la gráfica correspondiente en tu cuaderno.
- Comparte tu trabajo con el resto del grupo y con tu docente.

Glosario

Prisma regular. Es un poliedro que consta de dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y de caras laterales que son paralelogramos, ejemplo de ello son los prismas cuadrangulares, triangulares, etcétera.

Como te habrás dado cuenta, la cantidad de agua que se vierte a cada florero se distribuye de diferente manera. Si el florero es más estrecho de la parte de abajo, con menos vasos de agua alcanza una mayor altura; si es más ancho requiere de más vasos de agua para alcanzar una misma altura. Por tal motivo, la altura del agua no aumenta constantemente, a menos que se trate de un **prisma regular** o cilindro.

Puedes ver que en la figura *a*, al principio la altura que alcanza el agua es más lenta, ya que su base es muy ancha, pero como a la mitad del florero alcanza mayor altura mucho más rápido a medida que pasa el tiempo, puesto que es mucho más angosto, luego vuelve a ser lento pues el florero se ensancha.

En la figura *b*, la altura del agua es constante, ya que su forma es regular hasta llegar a la parte de arriba que se vuelve más estrecha, por lo tanto alcanza una altura mayor rápidamente.

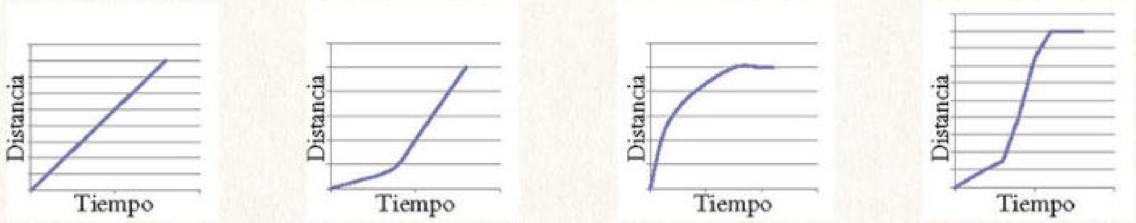
Ejercicios y aplicaciones

Resuelve los siguientes problemas, primero de manera individual; al terminar, reúnete con otro estudiante para revisar tu trabajo y exponer tus argumentos.

1. Relaciona cada gráfica con su acción (Fig. 3.45).

a) En un principio un auto se desplaza rápidamente y de inmediato bajó la velocidad.
b) Un auto empezó a caminar lentamente y después aumentó la velocidad.
c) El coche comenzó muy despacio, aumentó mucho su velocidad y posteriormente fue disminuyendo su velocidad.
d) El auto mantuvo una velocidad constante.

Fig. 3.45 ¿Qué acción describe cada gráfica?



2. ¿Cuál es la gráfica que relaciona el tiempo de llenado con la vasija (Fig. 3.46) y la altura del agua?

Escribe el inciso sobre la línea.

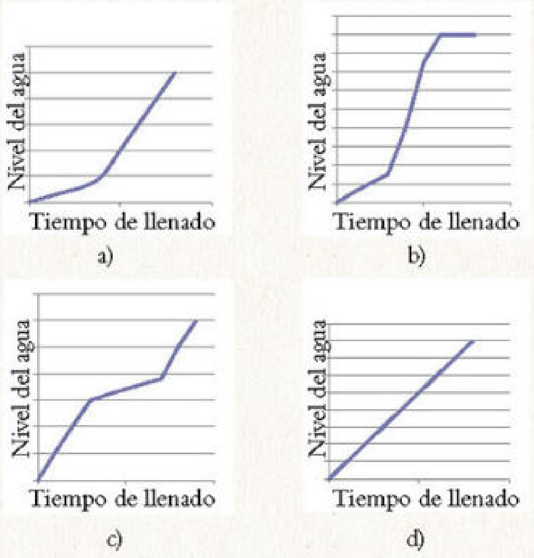


Fig. 3.46 ¿Cuál gráfica corresponde a la vasija?

3. Escribe en tu cuaderno la historia de una avioneta que sigue el movimiento de la gráfica (Fig. 3.47):

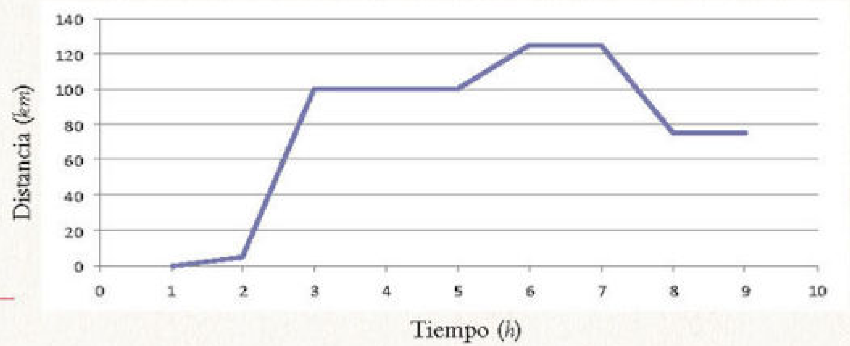


Fig. 3.47 Gráfica que describe el vuelo de una avioneta.

4. La salida de la estación fue lenta pero de inmediato ascendió. Dos minutos mantuvo la velocidad constante, después se dejó caer repentinamente hasta que volvimos a mantener una velocidad constante.

- ¿Cuál es la gráfica (Fig. 3.48) que describe mejor este recorrido?

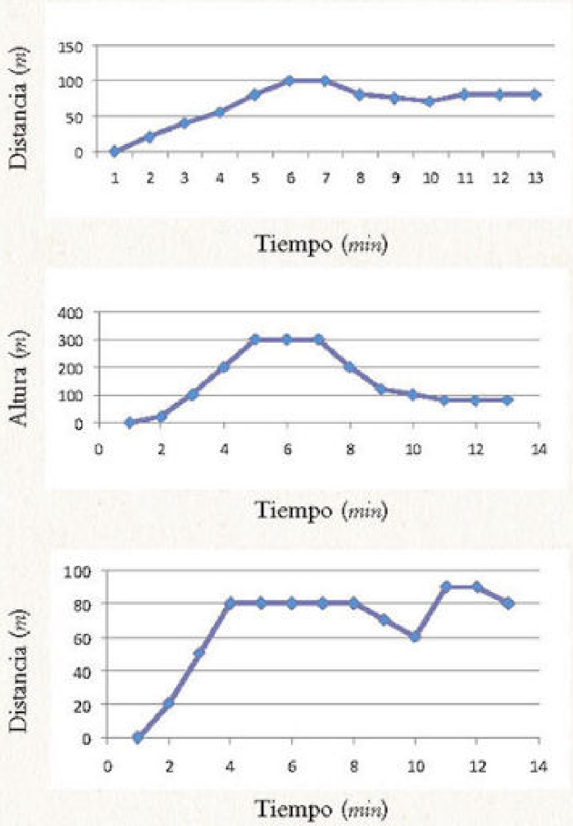


Fig. 3.48 ¿Cuál gráfica describe mejor el recorrido?

5. Elabora en tu cuaderno las gráficas de los siguientes enunciados:

- Áurea dejó abierta la llave de su tinaco para vaciarlo y poder limpiarlo. El nivel del agua empezó a descender rápidamente pero el vecino, sin saber, volvió a cerrar la llave por unos cuantos minutos. Áurea, al darse cuenta de la situación, abrió de nuevo la llave y el tinaco se terminó de vaciar rápidamente.
- Lupe va diario en coche al trabajo pero un día a la semana pasa a recoger a su amiga Ana.
- Un autobús de pasajeros recorre varios kilómetros diarios y sus paradas son constantes.
- Una pelota de tenis que se tira desde la azotea de una casa.

6. Realiza la siguiente actividad:
Reúne cuatro recipientes de formas irregulares cuyas bases sean anchas y otras estrechas; pueden ser macetas, cubetas, floreros, etcétera (Fig. 3.49).

- Marca con un plumón cada centímetro de altura, empezando por la base. Traza una gráfica pensando en qué forma tendrá la recta de acuerdo con la altura que va alcanzando el agua.
- Elije un vaso o recipiente y con ese mismo vas a llenar con agua cada uno de los recipientes restantes.
- En una tabla como la 3.11 registra cuántos vasos de agua están utilizando para completar cada centímetro de altura.
- Para cada recipiente completa una tabla diferente.
- Una vez que termines de completar las tablas, tendrás que hacer una gráfica para cada recipiente.
- Compara tu gráfica con la que construiste al principio de la actividad.

Fig. 3.49 Recipientes de formas irregulares.

Tabla 3.11

Maceta	
Número de vasos	Altura (cm)
1	1
2	5
3	

7. Apoyados por su docente, organicen una dinámica a escala grupal para revisar los procedimientos seguidos en cada ejercicio, esclarecer las dudas y arribar a conclusiones comunes.

Uso de las TIC

Para reforzar sus conocimientos pueden consultar la siguiente dirección electrónica. Encontrarán programas interactivos y simuladores relacionados con el llenado de recipientes.

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b03_t07_s01_descartes/doc/info.html

ESFINGE

Probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes

Eje: Manejo de la información.

Tema: Nociones de probabilidad.

Actividad individual

Conocimientos previos

En esta lección utilizarás el concepto de independencia (lo estudiaste en las lecciones 1.6 y 2.6) ya que ahora se definirá una nueva regla para el cálculo de probabilidades de eventos que suceden esperando el resultado de un evento anterior, de modo que será necesario identificar la independencia entre eventos para poder calcular el evento deseado.

Considera el siguiente experimento:

Al lanzar una moneda en tres ocasiones, ¿cuál es la probabilidad de obtener águila en los tres lanzamientos?

Ya sabes cómo calcular la probabilidad de obtener águila en un tiro (Fig. 3.50):

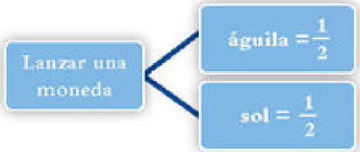


Fig. 3.50 Lanzar una moneda.

Además, al tirar la moneda en repetidas ocasiones la probabilidad sigue siendo la misma (Fig. 3.51):

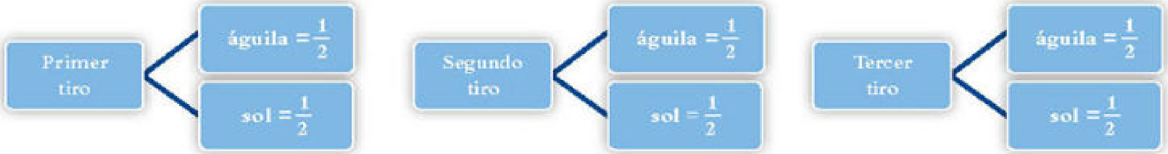


Fig. 3.51 Lanzar tres veces una moneda.

Pero lo que necesitas es saber la probabilidad de obtener águila en los tres lanzamientos. Con el esquema anterior puedes ver que los tiros son independientes, pero si obtienes sol en alguno de ellos, el resultado ya no será el que necesitas, así que emplearás un nuevo esquema en donde se pueda observar mejor el comportamiento de los resultados que necesitas para obtener la probabilidad de obtener águila en los tres lanzamientos (Fig. 3.52).

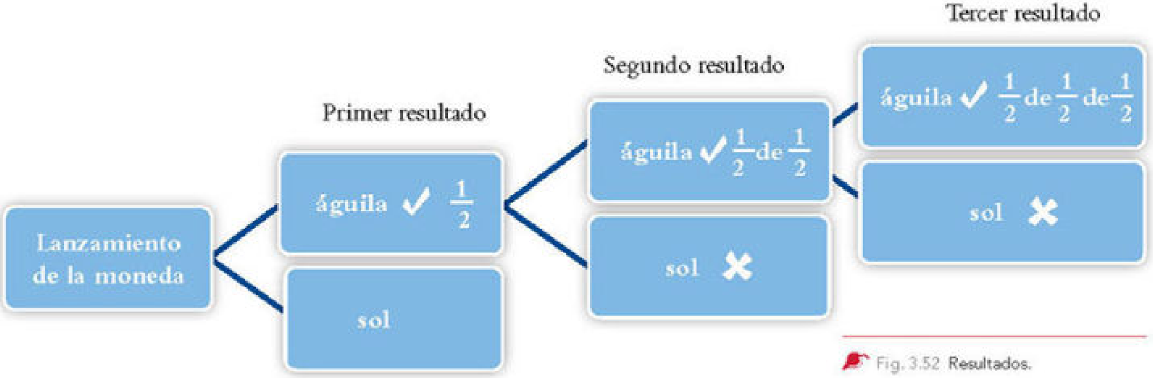


Fig. 3.52 Resultados.

En este caso se muestra que la probabilidad de obtener águila en el primer lanzamiento es $\frac{1}{2}$; un resultado de dos posibles, pero en el segundo se extiende el resultado de haber obtenido águila para poder obtener otros dos nuevos posibles resultados, es decir, obtener $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, esto es:

$$P\text{ (obtener águila en el primer tiro)} = \frac{1}{2}$$

$$P\textit{ (obtener águila en el segundo tiro)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\textit{águila}}{\textit{dos posibles resultados}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Continuando con la misma lógica que se tiene para llegar al tercer resultado exitoso, ahora se parte del segundo resultado.

$$P\textit{ (obtener águila en el tercero)} = \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{\textit{obtener águila en el segundo}}{\textit{dos nuevos posibles resultados}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{8}$$

Así, la probabilidad de obtener águila en los tres lanzamientos es $\frac{1}{8}$, este resultado es posible obtenerlo con la siguiente regla: Si los eventos son independientes, entonces se puede utilizar la regla del producto:

La probabilidad de obtener águila es igual al producto de la probabilidad de cada tiro:

P (tres águilas) = P (águila) $\times$ P (águila) $\times$ P (águila)

P (tres águilas) = $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

P (tres águilas) = $\frac{1}{8}$

Más simple, ¿no crees?

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve los siguientes problemas, primero de manera individual; al terminar, reúnete con otro estudiante para revisar tu trabajo y exponer tus argumentos.

Analiza los siguientes eventos y justifica por qué son independientes. Realiza anotaciones en tu cuaderno y calcula la probabilidad que se pide.

1. Un leopardo tiene la probabilidad de capturar a su presa igual a $\frac{3}{5}$ en cada intento, en cada ocasión el leopardo descansa hasta recuperarse para intentarlo de nuevo si es que no tiene éxito.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener una presa en el segundo intento?

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener una presa en el quinto intento?

¡Ojo!, es importante que calcules la probabilidad de que falle en cada intento previo, recuerda la regla de la suma.

2. Una baraja de naipes tiene en total 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de obtener un as de corazones en la primera y segunda extracción, regresando el naipe extraído en la primera ocasión?

3. ¿Cuál será la probabilidad de obtener reyes en la segunda extracción sin importar de qué figura sea, tomando en cuenta que hay cuatro figuras diferentes en el total de naipes?

4. Se lanza un dado en dos ocasiones, ¿cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento resulte 1 y en el segundo lanzamiento resulte un número par?

5. Antonio conoció una chica muy atractiva la tarde que sacó a pasear a su perro, esta chica le contó que sólo andaba por ahí de casualidad y que no volvería a estar por ahí próximamente. Así que le pidió su número telefónico para no perder contacto. Sin darse cuenta Antonio extravió el papel donde anotó su número pero recordaba ciertas características. Era fácil recordar que los cinco números intermedios del teléfono eran 4-5-6-7-8, porque eran seguidos de un total de 7 números que componen el número telefónico de la chica; además recordaba que el primer número debe ser par y distinto de cero y que el último número era impar mayor que cuatro. ¿Cuál es la probabilidad de acertar con el número de la chica?

Sólo debe acertar en dos dígitos, el primero y el último, para que no te ocurra esto a ti, recuerda guardarlo bien.

6. Apoyados por su docente, organicen una dinámica a escala grupal para revisar los procedimientos seguidos en cada ejercicio, esclarecer las dudas y arribar a resultados comunes.

Evaluación

Resuelve los siguientes problemas de manera individual, pero puedes comentar con otros estudiantes los procedimientos que seguirás y revisar las lecciones necesarias antes de responder.

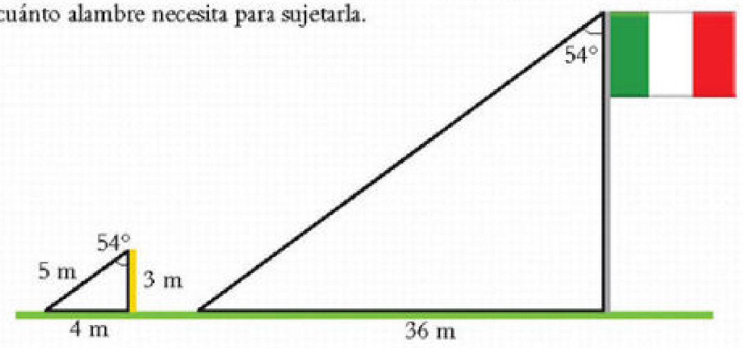
1. En la ecuación $3x^2 + 2x - 5 = 0$, de acuerdo con discriminante, ¿cuál de los siguientes enunciados corresponde a las soluciones de dicha ecuación?

a) La ecuación tiene una solución que es un número real.
b) La ecuación tiene dos soluciones que son números reales.
c) La ecuación tiene varias soluciones.
d) La ecuación no tiene soluciones reales.

2. Laura es 3 años mayor que su hermana y la suma de los cuadrados de sus edades es igual a 225 años. ¿Cuál de las siguientes expresiones cuadráticas representa este problema?

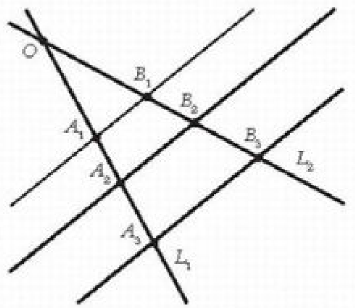
a) $x^2 + x + 3 = 225$
b) $2x^2 + 9 = 225$
c) $(x + 3)^2 = 225$
d) $2x^2 + 6x - 216 = 0$

3. Un poste de 3 metros proyecta una sombra de 4 metros. Cerca de ahí, un asta bandera proyecta una sombra de 36 metros. El señor Becerril quiere saber la altura del asta y cuánto alambre necesita para sujetarla.



a) ¿Qué altura tiene el asta bandera? ______
b) ¿Qué tipo de triángulos se forman? ______
c) ¿Qué tendría que suceder para que los triángulos sean congruentes?
______
d) ¿Cuál es la razón de semejanza de los triángulos?
______
e) ¿Cuál sería el criterio de semejanza que correspondería a los dos triángulos?
______
Argumenta tu respuesta. ______
f) El señor Becerril compró 40 m de alambre. ¿Le alcanzará para sostener el poste? Argumenta tu respuesta ______
______

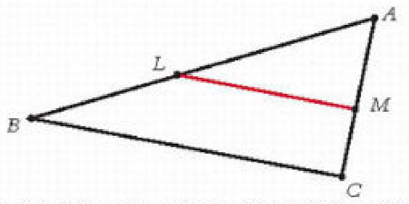
4. Observa la siguiente figura:



Si a dos rectas transversales L_1 y L_2 las intersectamos con una familia de rectas paralelas (como las de la imagen anterior), según el teorema de Tales, ¿qué relaciones se deben o pueden cumplir?

a) $\frac{OA_1}{A_1B_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2}$ b) $\frac{B_1B_3}{A_3A_2} = \frac{B_3B_2}{A_1A_3}$ c) $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$

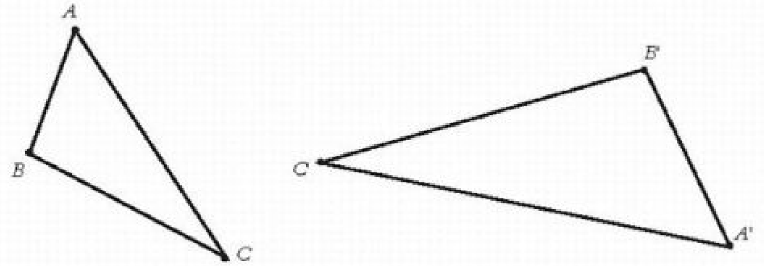
5. Para el triángulo ΔABC se cumple que $BC \mid\mid LM$.



Calcula $|MC|$ si $|AB| = 32$, $|AL| = 8$ y $|AM| = 8.75$

a) 26.25 b) 29.25 c) 70 d) 38

6. Observa las siguientes figuras:



Si $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 18$ y $A'B' = 30$, $B'C' = 36$, $A'C' = 54$. Los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son…

a) Homotéticos pero no semejantes
b) Semejantes y homotéticos
c) Semejantes pero no homotéticos
d) Ni semejantes ni homotéticos

7. Comparte tus respuestas con otros estudiantes y relata los procedimientos y razonamientos que seguiste para contestar. Bajo la asesoría del docente, validen los resultados ante el grupo.

BLOQUE IV

Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

En este cuarto bloque de tu tercer curso de Matemáticas, obtendrás expresiones cuadráticas para resolver problemas, analizarás los cuerpos que se generan al girar una figura sobre un eje, comprenderás los valores de la pendiente de una recta, así como las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo, conocerás las razones trigonométricas, entre otros temas.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Planeación del Profesor
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	4.1	21	
Forma espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	4.2	22	
	Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	4.3	23	
		Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	4.4	24	
		Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	4.5	25	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	4.6	26	
	Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	4.7	27	

Expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tema: Patrones y ecuaciones.

Actividad individual

Conocimientos previos

Completa la tabla 4.1 en donde n representa el número de término en las siguientes sucesiones.

n	1	2	3	4	15	80
	3	5	7			
	1	4	7			

Tabla 4.1

De manera individual, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Cómo obtienes los términos de una sucesión? Explícalo.
- ¿Qué diferencia existe entre cada par de términos?
- ¿Cuál es la regla que rige la primera sucesión? Argumenta.
- ¿Crees que la regla $3n + 2$ es la que determina la segunda sucesión?
- Si esta regla no corresponde a la segunda sucesión, ¿cuál sería la correcta? Argumenta tu respuesta.

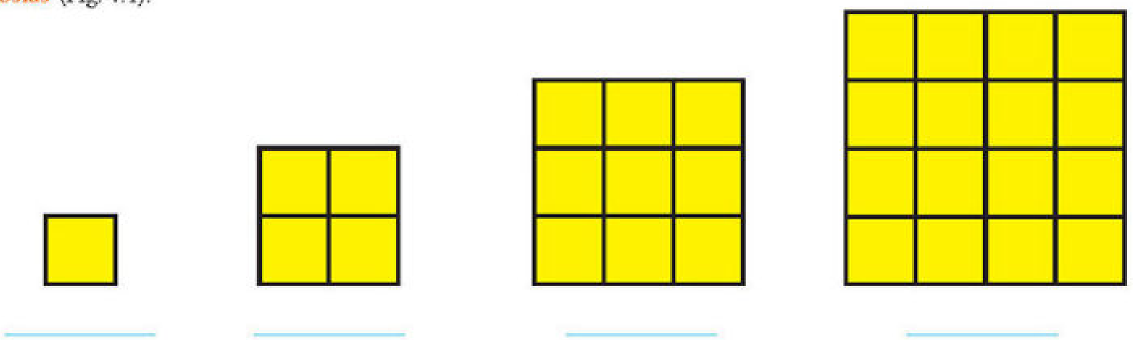
Lección 4.1

- ¿El número 68 pertenece a algún término de la primera sucesión? Justifica tu respuesta.
- Comparte tus respuestas con las de otros estudiantes y con tu docente.

Actividad en parejas

Una casa que vende material para construcción tiene las siguientes muestras de **celosías** (Fig. 4.1):

Fig. 4.1 Muestras de celosías.



En parejas respondan en su cuaderno las siguientes preguntas. Al terminar, discútanlas a escala grupal con el apoyo de su docente.

- ¿Cuántos cuadritos tendría la figura 10, es decir, el décimo término de la serie?
- ¿Qué número de figura tendría 400 cuadrados?
- ¿Qué diferencia encuentras entre este patrón y el que presenta la tabla 4.1?
- ¿Crees que el modelo algebraico es de la forma $y = mx + b$? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué expresión algebraica es la que relaciona el número de término con el número de cuadritos de cada celosía?

Glosario

Celosía. Es un enrejado con travesaños de madera o hierro que suele colocarse en huecos como ventanas de casas o edificios para que las personas puedan ver hacia afuera sin que ellas sean vistas.

Pistas

- Escribe sobre las líneas el número de cuadritos que tiene cada celosía.
- Observa detenidamente la base y la altura de cada celosía, anota cómo va aumentando cada una y trata de obtener un patrón.
- Construye una tabla para organizar la información y, a partir de ésta, trata de deducir el patrón numérico que rige a dicha sucesión numérica.

Nuevos Conocimientos

Una sucesión es un conjunto ordenado de números en donde a cada uno se le llama *término* de acuerdo con la posición que ocupan dentro de ella.
Dichos términos se indican con cualquier letra.
Las sucesiones pueden ser finitas o infinitas y seguir un patrón. A partir de ello podemos obtener una regla o expresión algebraica por medio de la cual calcular el término que se desee.
En primer grado de secundaria aprendiste a obtener la expresión algebraica de una sucesión con figuras cuya diferencia en cada par de términos es constante.
La sucesión es de la forma $y = mx + b$, ya que las expresiones algebraicas que representan a estas sucesiones son lineales como en el caso del problema que resolviste en el apartado de conocimientos previos. No todas las sucesiones representan este tipo de expresiones.

Actividad en equipo

En equipo, observen la tabla 4.2 referente al problema planteado en la actividad anterior, complétenla y compárenla con la que construyeron en sus cuadernos.

n	1	2	3	4	5	6	7
Sucesión	1	4	9	16			

Tabla 4.2

1a diferencia	3	5	7	___	___	___
2a diferencia	2	2	___	___	___	

- Observen la tabla: la primera diferencia, ¿es constante? Expliquen por qué.
- ¿Se trata de una sucesión lineal? Expongan sus argumentos.
- Compartan sus respuestas a escala grupal bajo la guía de su docente.

Método de diferencias

Una sucesión es cuadrática cuando sus primeras diferencias no son iguales pero las segundas diferencias son constantes, por lo cual la expresión algebraica que la modela será de segundo grado. Sabemos que la expresión general de una ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c$.

A partir de dicha expresión el método de diferencias nos ayuda a obtener la regla de una sucesión cuadrática (Tabla 4.3).

- Hay que calcular la primera y segunda diferencia de los términos de la sucesión para expresiones algebraicas de segundo grado.

Si x es igual a….	1	2	3	4	5
Expresión que se obtiene al sustituir el valor de x en $ax^2 + bx + c$	$a(1)^2 + b(1) + c$ $a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c$ $4a + 2b + c$	$a(3)^2 + b(3) + c$ $9a + 3b + c$	$a(4)^2 + b(4) + c$ $16a + 4b + c$	$a(5)^2 + b(5) + c$ $25a + 5b + c$

Tabla 4.3

1a diferencia	$3a + b$	$5a + b$	$7a + b$	$9a + b$
2a diferencia	$2a$	$2a$	$2a$	

La primera diferencia se obtiene restando las parejas de a, b y c.

La constante que surge en las segundas diferencias es el doble del coeficiente del término cuadrático de la expresión.

Las expresiones en color rojo siempre van a ser las mismas en sucesiones de segundo grado para los valores correspondientes de x.

Regresando a la tabla de valores con las sucesiones numéricas de las celosías, queda lo siguiente (Tabla 4.4):

$a + b + c = 1$	$4a + 2b + c = 4$	$9a + 3b + c = 9$	$16a + 4b + c = 16$	$25a + 5b + c = 25$

Tabla 4.4

$3a + b = 3$ $5a + b + 0c = 5$ $7a + b + 0c = 7$ $9a + b + 0c = 9$ ← Primera diferencia

$2a = 2$ $2a = 2$ $2a = 2$ ← Constante

De cada una de las primeras diferencias se obtiene un sistema de ecuaciones.

Como el primer término de la sucesión es siempre $a+b+c$, sustituyendo el valor de a y b se obtiene c.

- $(5a-3a)+(b-b)\cancel{=}5-3$
  $2a = 2$ despejando $a=1$ $b=0$ $c=0$
- $(7a-5a)+(b-b)\cancel{=}7-5$
  $2a = 2$ despejando $a=1$ $b=0$ $c=0$
- $(9a-7a)+(b-b)\cancel{=}9-7$
  $2a = 2$ despejando $a=1$ $b=0$ $c=0$

Sustituyendo en la expresión $ax^2 + bx + c$, que es la fórmula general de una ecuación cuadrática resulta que $x^2 + 0x + 0$.

Por lo tanto, la expresión cuadrática que determina la sucesión de las celosías es x^2.

Para constatar que x^2 es realmente la regla de sucesión, obtén el cuadrado del primer término, segundo, tercero y así sucesivamente. El resultado es el número de cuadritos que tiene cada figura que ocupa ese término.

Actividad individual

Por tu cuenta, resuelve lo siguiente; observa la serie:

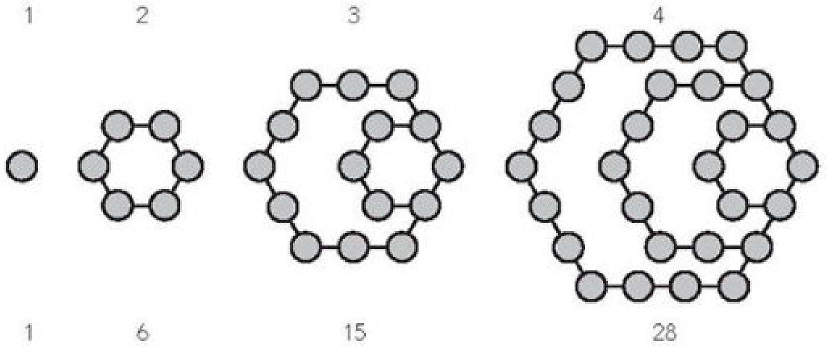


Fig. 4.2 Observa la serie.

- Con base en los puntitos que tiene cada dibujo de la figura 4.2, completa la tabla 4.4.

No. de figura	1	2	3	4	5	8
No. de puntitos	1	6	15	28		

Tabla 4.4

Actividad en parejas

Continúen con la actividad anterior ahora organizados en parejas. Observen la figura 4.2 y respondan las siguientes preguntas en su cuaderno.

- ¿Cómo es la primera diferencia de la sucesión?
- ¿Qué tipo de sucesión es? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuántos puntitos tendría el sexto término de la serie?
- Contrasten sus respuestas con las de otros estudiantes, corrijan si es necesasrio.

Ahora sabes que si partes de la expresión algebraica $ax^2 + bx + c = 0$, por el método de diferencias se puede obtener la regla de una sucesión cuando ésta es cuadrática. También puedes formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a, b, c. Para encontrar sus valores recurre a los valores de tres parejas ordenadas de la tabla 4.4.

Por lo tanto:
si $x = 1,\ y = 1$
si $x = 2,\ y = 6$
si $x = 3,\ y = 15$

Con estos números se forma un sistema de ecuaciones:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ecuación 1 $a(1)^2 + b(1) + c = 1$
$a + b + c = 1$

Ecuación 2 $a(2)^2 + b(2) + c = 6$
$4a + 2b + c = 6$

Ecuación 3 $a(3)^2 + b(3) + c = 15$
$9a + 3b + c = 15$

$$\text{Sistema de ecuaciones: } \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 15 \end{cases}$$

Elijan el método y resuelvan el sistema de ecuaciones anterior.

- ¿Qué valores obtuvieron para a, b y c?

a = ________ b = ________ c = ________

- Sustituyan estos valores en la expresión $ax^2+bx+c=0$.

____

- ¿Cuál es la expresión algebraica que rige esta sucesión?

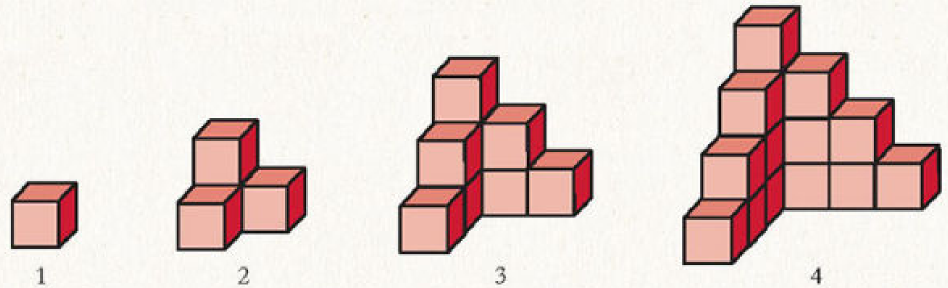
____

- Comparen sus respuestas con las de otros estudiantes bajo la guía de su docente.

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve los problemas primero de manera individual; después, junto con otro estudiante, repasa tus procedimientos (puedes consultar la lección); al final, comparen sus resultados.

1. Observa el siguiente patrón (Fig.4.3) y responde las preguntas que se indican:



1 2 3 4

Fig. 4.3 Serie con cubos.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona el número de figura con el número de cubos de cada una?
- ¿Cuántos cubos tendría la figura 20?

2. Lulú armó las siguientes figuras con pequeños tramos de alambre (Fig. 4.4):

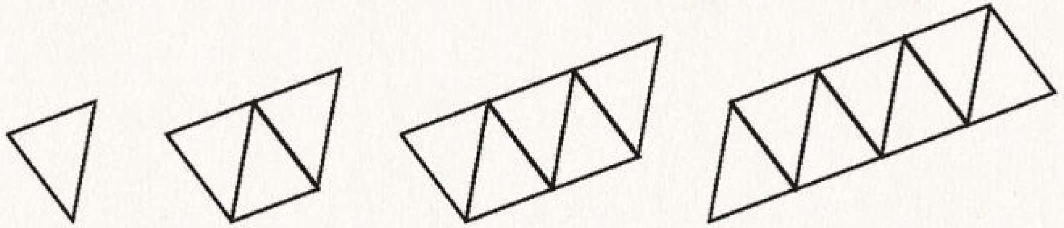


Fig. 4.4 Serie con tramos de alambre.

- ¿Se trata de una sucesión lineal o cuadrática?
- Justifica tu respuesta.

3. Completa la tabla 4.5 e identifica el modelo algebraico que siguen las sucesiones numéricas; anota la regla en el espacio correspondiente.

Término	1	2	3	4	25	30	enésimo término
	1	4	9	16			
	3	12	27	48			
	2	5	10	17			
	4	10	20	34			

Tabla 4.5

4. Observa la figura 4.5 y responde en tu cuaderno las preguntas:

1 2 3

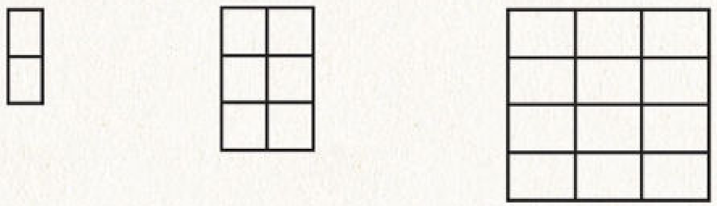


Fig. 4.5 Sucesión de figuras.

- ¿Cuántos cuadritos se agregaron a la figura dos para hacer la figura tres?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la sucesión de figuras anterior?

5. Completa la tabla 4.6 escribiendo los números correspondientes a cada una de las siguientes reglas de sucesión.

n / Regla	1	2	3	4	5	6	10	15
n^2								
$3n^2$								
$n^2 + 1$								
$2n^2 + 1$								

Tabla 4.6

6. Apoyados por su docente, organicen una dinámica a escala grupal: revisen los procedimientos seguidos en cada ejercicio, esclarezcan las dudas y arriben a conclusiones comunes.

Desarrollos planos de conos y cilindros rectos

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Figuras y cuerpos.

Actividad individual

Conocimientos previos

En esta lección echaremos mano de conceptos como: Simetrías, rotaciones y traslaciones; Cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares: Conceptos y criterios de congruencia y semejanza de triángulos.

Sólidos de revolución

La geometría que hemos estudiado nos ha permitido comprender y modelar una serie propiedades abstractas y problemas prácticos. Hasta ahora nuestro lugar de trabajo ha sido el plano, en él sólo hay dos dimensiones geométricas.

Nuestro siguiente paso será valernos de lo que hemos aprendido para comenzar a hacer geometría en un lugar más grande: el espacio de tres dimensiones o, simplemente, espacio.

Así representaremos pequeñas partes de nuestro propio espacio:

- ¿A qué figura geométrica se parece una pelota? (Fig. 4.6)

Fig. 4.6 ¿A qué figura geométrica se parece una pelota?

Ya sea que queramos representar algo o estudiar un objeto del espacio, una cosa es segura: eventualmente hay que construirlo.

- El barquillo de un helado, ¿a qué figura geomética se parece? (Fig. 4.7)
- ¿Cómo podríamos construir esa figura geomética?

Fig. 4.7 ¿A qué figura geométrica se parece un barquillo?

Seguramente ya tienes alguna idea. Intenta imaginar lo siguiente:

- Piensa en una recta en el espacio a la cual llamaremos eje.
- Luego considera un segmento que puede ser paralelo o transversal al eje, e intersectarlo o no (ver figura 4.8).

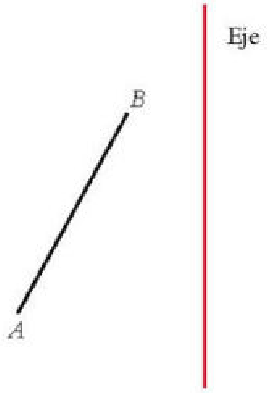


Fig. 4.8 Eje y segmento que puede ser paralelo o transversal.

- ¿Qué pasaría si rotáramos el segmento de recta AB alrededor del eje?
- ¿Qué sucedería con el segmento? Coméntalo con otros integrantes del grupo.

Como recordarás, las rotaciones preservan las longitudes y ángulos. Esto quiere decir que al rotar nuestro espacio en torno al eje, el segmento conserva su longitud e inclinación con respecto al eje. Si rotamos 90° y pensamos en el giro como un movimiento gradual (como abrir una puerta), el segmento no llegaría instantáneamente a su posición final.

Sabías que...

Técnicamente, nuestro universo no se corresponde de manera íntegra con el modelo del espacio tridimensional: hay fenómenos que ocurren en él y que para poderlos explicar, los físicos deben recurrir a representaciones geométricas con más dimensiones.

Este movimiento continuo hace que en cada instante el segmento ocupe un lugar distinto en el espacio, y si se va dejando una copia del segmento en cada lugar que va ocupando, se genera algo completamente nuevo (ver figura 4.9).

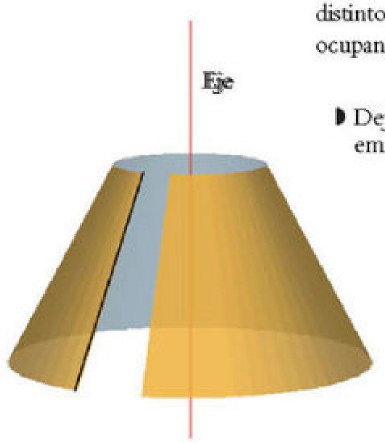


Fig. 4.9 En cada instante, el segmento ocupa un lugar distinto en el espacio.

- Deja que el segmento dé un giro completo en torno al eje y mira qué objeto emerge (Fig. 4.10). Descríbelo.

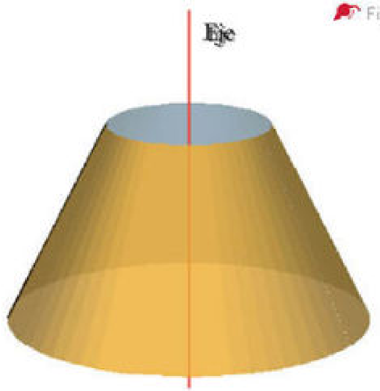


Fig. 4.10 El segmento completa un giro.

Esta figura es en realidad un cono truncado.

- Observa lo que sucede si haces coincidir uno de los extremos del segmento con un punto del eje (ver figura 4.11). ¿Qué figura se ha formado?

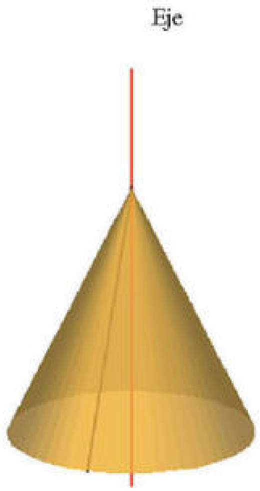


Fig. 4.11 Uno de los extremos del segmento intersecta al eje.

Pero este cono está abierto y le hace falta su "tapa". Haz lo siguiente:

- En vez de rotar un segmento, rota un triángulo rectángulo tal que uno de sus catetos esté contenido en el eje (ver figura 4.12). ¿Qué figura obtuviste?

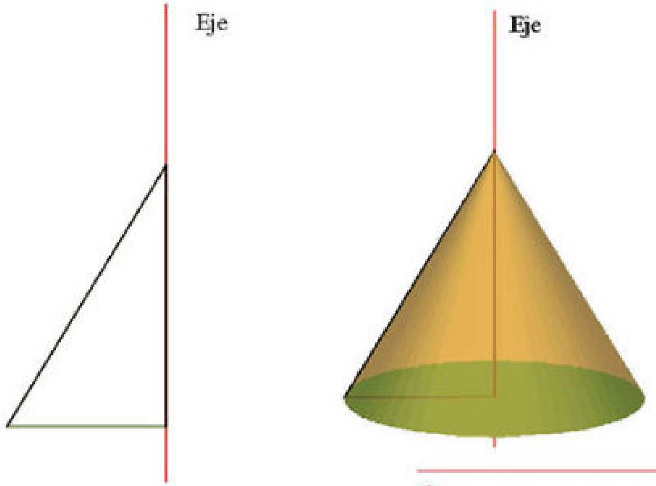


Fig. 4.12 Rotación de un triángulo rectángulo.

Por la forma como son obtenidas, a estas figuras se les llama *sólidos de revolución*.

- Considera un semicírculo tal que sus extremos sean puntos del eje de rotación (ver figura 4.13). ¡Ahora ponlo a rotar!
- ¿Qué figura obtuviste? Coméntalo con tus compañeros y con tu docente.

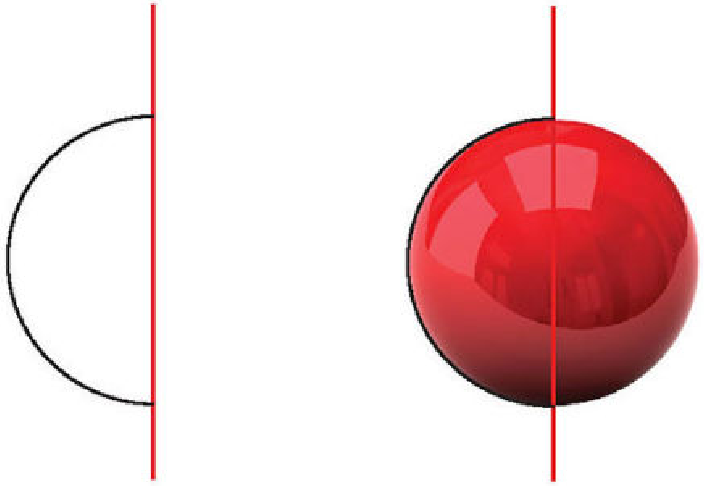


Fig. 4.13 Rotación de un semicírculo.

Actividad en parejas

Trabajen en parejas para construir la siguiente figura:

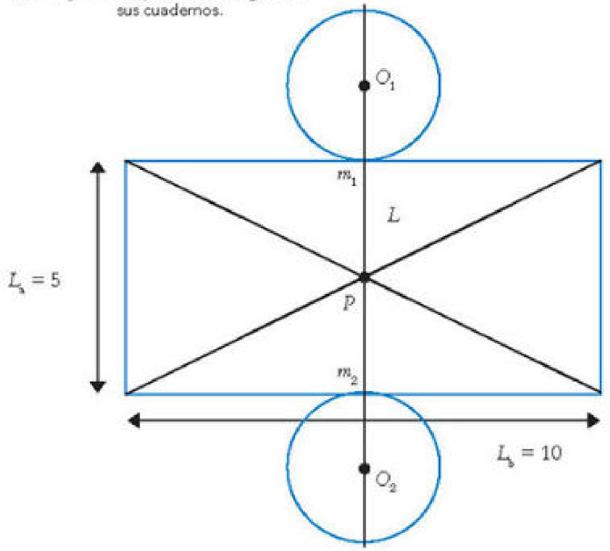
- Roten un rectángulo tal que uno de sus lados esté contenido en el eje de rotación. ¿Qué figura se genera? Dibújenla.
- Visualicen la figura rotando alguno de los lados ajenos al eje; dibujen en su cuaderno esta rotación. ¿Qué figura se obtiene?
- ¿Qué ocurre con la simetría de la figura obtenida? Descríbanla.
- El solido de revolución obtenido, ¿conserva las características geométricas de la figura inicial que la generó? Descríban cuáles.
- La esfera y la semicircunferencia generadora, ¿tienen el mismo radio? Verifíquenlo.
- La altura y el radio del cono, ¿están en relación directa con la longitud y ángulo (con respecto al eje) del segmento generador? Verifíquenlo.
- Para concluir, sigan a su docente en una dinámica a escala grupal para escribir en el pizarrón las propiedades de los sólidos de rotación en su relación con las figuras generadoras.

Actividad en equipo

Estas mismas propiedades nos permiten modelar y reconstruir a los sólidos de revolución a partir de desarrollos planos.

- Trabajen en equipo para construir el desarrollo plano de un cilindro de altura $h = 5$ y radio $r = 1.6$. Utilicen regla, escuadra y compás; tracen en una hoja en blanco:

Fig. 4.14 Reproduzcan la figura en sus cuadernos.



1. Un rectángulo de base $L_b = 10$ cm y de altura $L_a = 5$ cm.
2. Las diagonales del rectángulo; marquen el punto P de intersección.
3. Por el punto P una recta L que sea perpendicular a la base L_b.
4. Los puntos de intersección m_1 y m_2; de la recta L con el rectángulo.
5. Fuera del rectángulo, los puntos O_1 y O_2 sobre la recta L de modo que equidisten respectivamente de los puntos m_1 y m_2 una distancia de 1.6 cm, es decir, que: $|O_1 m_1| = |O_2 m_2| = 1.6$ cm.
6. Las circunferencias C_1, C_2 de radio 1.6 cm y centro en O_1, O_2, respectivamente.

- Una vez que hayan terminado sus trazos (ver figura 4.14), coloreen y recorten (sin separar las circunferencias del rectángulo), siguiendo los bordes de ambas figuras (ver figura 4.15):

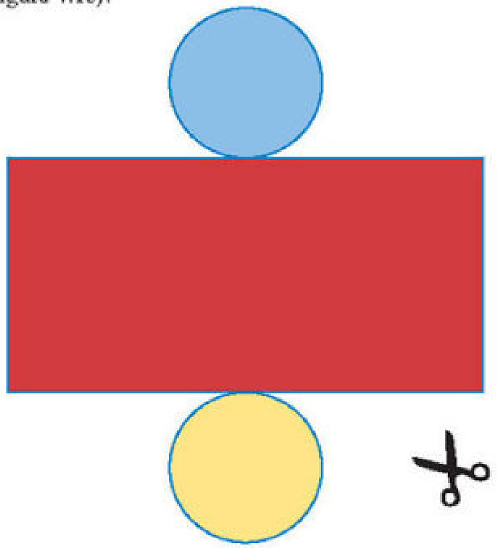


Fig. 4.15 Coloreen y recorten la figura.

- Finalmente, pliéguenla hasta formar un cilindro (ver figura 4.16), y apliquen pegamento en los bordes de unión.

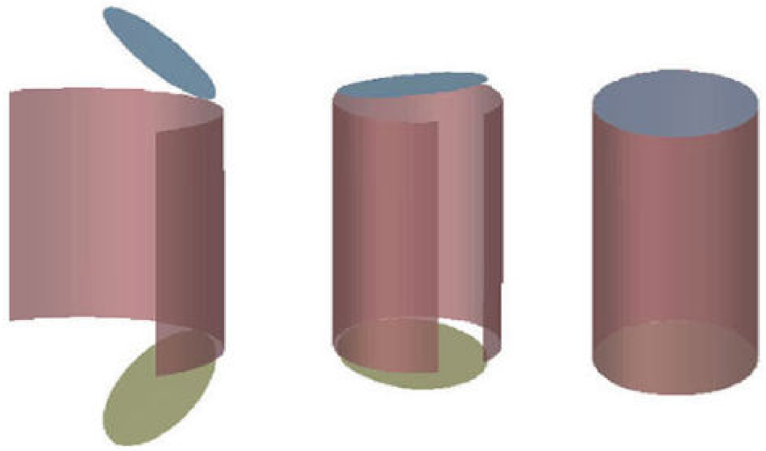


Fig. 4.16 Formen un cilindro.

- Sugerencia: para mayor facilidad de pegado, antes de recortar su figura dibujen unas pequeñas lengüetas y recorten sin despegarlas (ver figura 4.17).

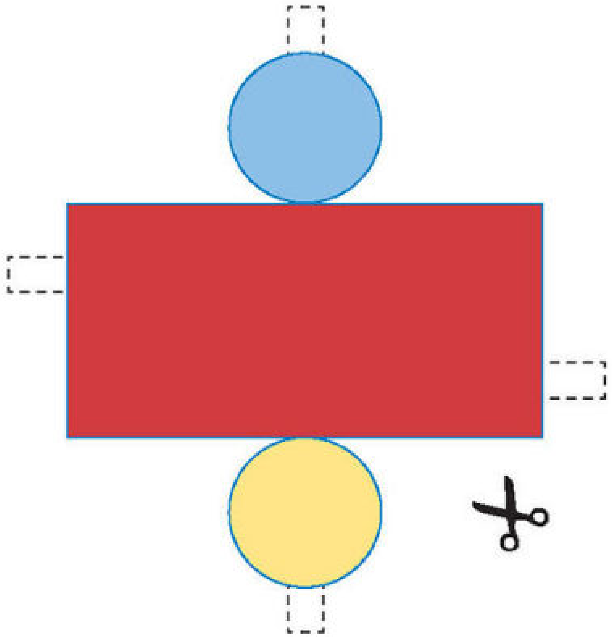


Fig. 4.17 Agreguen pequeñas lengüetas.

- Para concluir, compartan su trabajo con otros equipos y comenten las propiedades de la figura que construyeron.
- En dinámica grupal, establezcan sus conclusiones bajo la guía de su docente.

Actividad individual

Ahora trabaja de manera individual en el desarrollo plano de un cono de altura 15 cm y radio 5 cm. Utiliza regla, escuadra y compás; traza en una hoja en blanco:

1. Un círculo C_1 con centro en O y radio igual a 15.8.
2. Un ángulo de 113.85° con centro en O, y delimita su sector angular en C_1.
3. Un círculo C_2 de radio 5 cm; tangente a C_1 por un punto del arco del sector anterior.

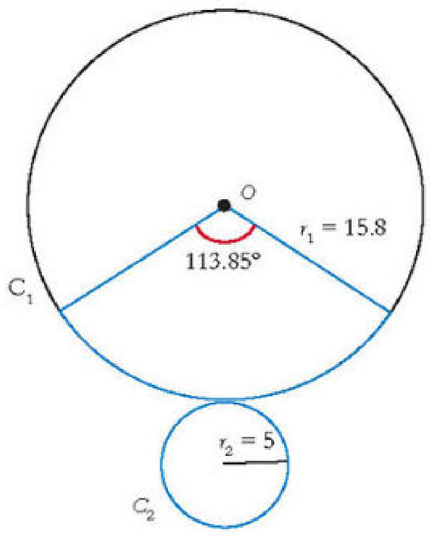


Fig. 4.18 Reproduce los trazos en tu cuaderno.

- Una vez que hayas terminado los trazos (ver figura 4.18), colorea el sector angular y la circunferencia tangente, luego recórtalos pero sin separarlos.
- Finalmente, pliega hasta formar un cono (ver figura 4.19), y aplica pegamento en los bordes de unión.
- Si lo prefieres, primero dibuja las lengüetas y recórtalas sin separarlas de tu figura, ellas te ayudarán al momento de pegar (ver figura 4.20).
- Describe las propiedades de la figura obtenida y coméntalas con otros estudiantes y con tu docente.

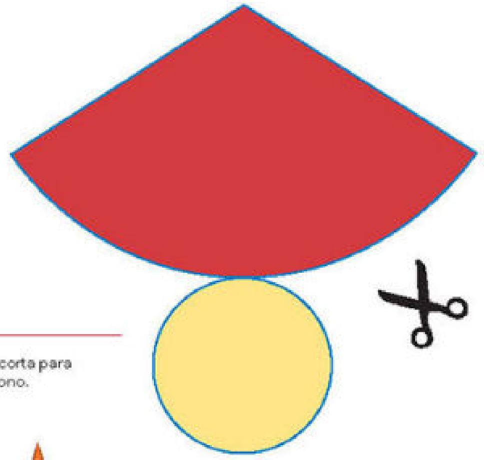


Fig. 4.19 Pliega y recorta para formar un cono.

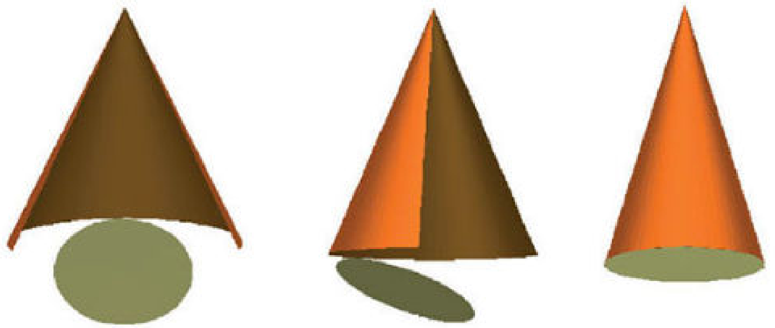


Fig. 4.20 Agrega lengüetas.

Nuevos Conocimientos

Las medidas para cada uno de los desarrollos planos no fueron casualidad. Por ejemplo, habrás notado que al momento de pegar, obtuviste un cilindro y un cono, justamente de las medidas propuestas al inicio. Esto es resultado de aplicar ciertos cálculos que se deducen a partir de observaciones precisas. Su estudio será abordado en la lección 5.2.

La figura 4.21 representa un cilindro en el espacio, la línea roja es el eje de rotación a partir del cual generamos al cilindro. Como consecuencia, la distancia de todos los puntos del cilindro al eje es la misma.

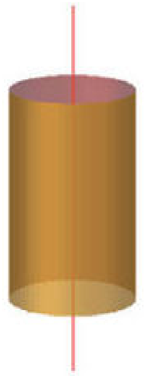


Fig. 4.21 Representación de un cilindro en el espacio.

¿Recuerdas cómo se calcula esa distancia? En el espacio, la distancia de un punto P a una recta L se define como la longitud del segmento perpendicular a L, que tiene por extremos a P y P' el punto de intersección con L (ver figura 4.22).

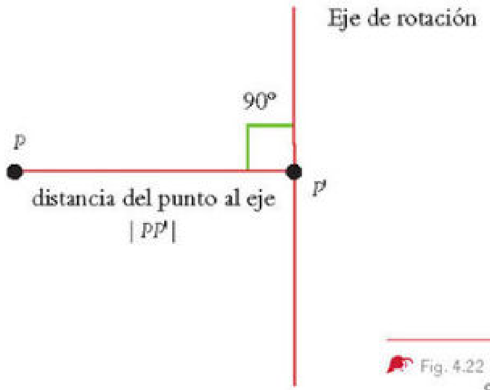


Fig. 4.22 Reproduce los trazos en tu cuaderno.

Si estuvieras por encima del cilindro y miraras hacia abajo, ¿qué verías? Pues todo dependerá de dónde te sitúes como observador: por ejemplo, si estás arriba del cilindro sobre el eje vertical y miras con dirección al otro extremo del eje, verías al mismo eje como un punto y, si el cilindro no es «alto», tendrías la sensación de ver un círculo «grueso» (ver figura 4.23).

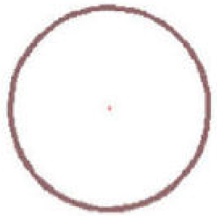


Fig. 4.23 Si estuvieras por encima del cilindro, así lo verías.

Mientras que si el cilindro es muy alto, la perspectiva te hará pensar que el cuerpo del cilindro es parte de algún cono muy largo (ver figura 4.24). Esto se debe a que, en perspectiva, todas las líneas paralelas se ven como líneas concurrentes.

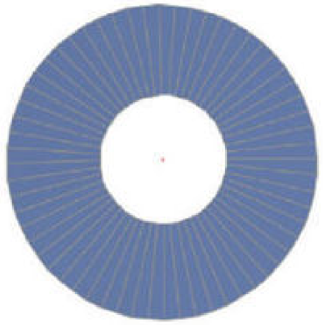


Fig. 4.24 Si el cilindro fuera muy alto, así lo verías.

Actividad en parejas

Organicen parejas de trabajo. Imaginen que «cortan» al cilindro con un plano. La idea de corte es natural si piensan en separar partes del cilindro.

- Para ser más específicos, respondan a la pregunta: ¿qué resulta de intersectar un plano con un cilindro?

La respuesta no es única y, como siempre, todo dependerá de la posición de uno con respecto del otro.

- En la figura 4.25, observen un cilindro cortado por un plano perpendicular al eje de rotación.
- ¿Que figura o sección se forma con la intersección del plano y el cilindro?
- Discútanlo con otros estudiantes y con su docente.

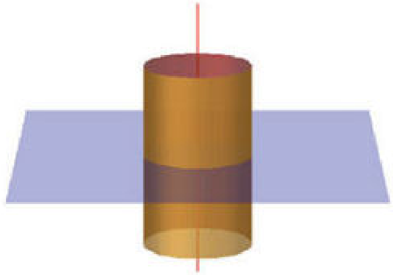
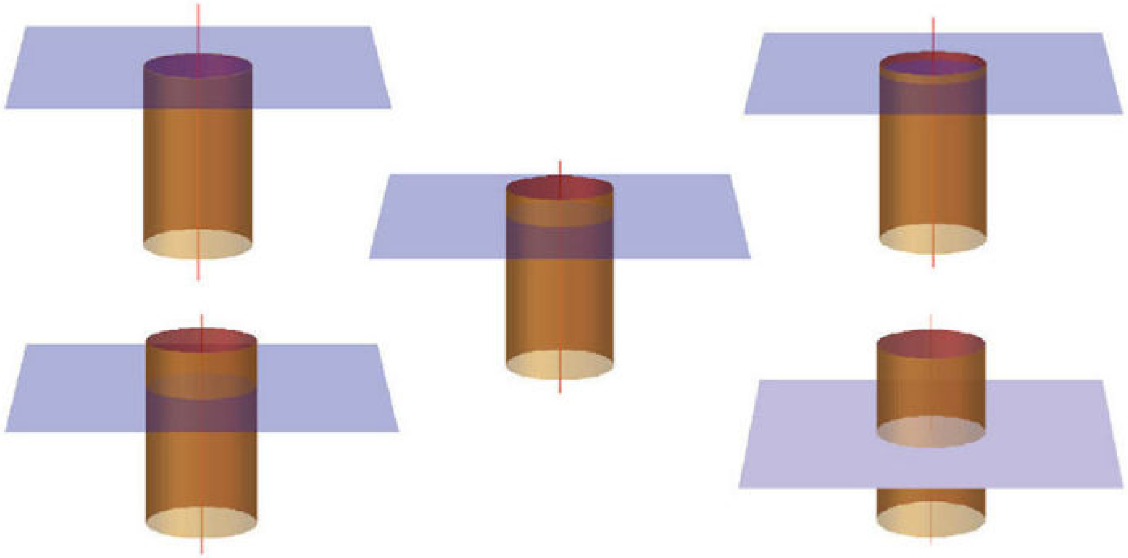


Fig. 4.25 Cilindro cortado por un plano perpendicular.

Por un momento imaginen una «película» compuesta por cinco «fotogramas», en la que se observa el paso del plano (siempre perpendicular al eje de rotación) a través del cilindro: al principio, el plano estará a la misma altura del cilindro, luego bajará poco a poco (ver figura 4.26).

Fig. 4.26 Paso del plano a través del cilindro.



- Las secciones formadas, ¿a qué figuras corresponden?
- Discútanlo en grupo bajo la asesoría de su docente.

ESFINGE

Por otra parte, si el plano no es perpendicular al eje de rotación (ver figura 4.27):

- ¿Se podría afirmar que las secciones corresponden a una circunferencia? Coméntalo con otros estudiantes.

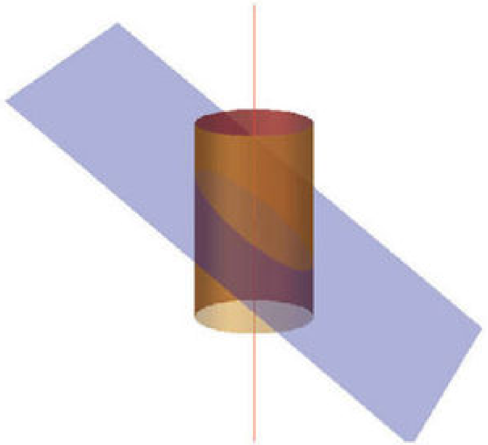


Fig. 4.27 Cuando el plano no es perpendicular al eje de rotación.

El argumento es el siguiente: por la simetría del cilindro, siempre que se intersecta con un plano, la sección correspondiente, vista desde el plano, tendrá como centro de simetría al punto O' que se genera por la intersección del plano con el eje de rotación. Luego, si el plano no es paralelo ni perpendicular al eje de rotación, los puntos de la intersección tendrán la siguiente particularidad: dos de ellos, m_1 y m_2 serán los más cercanos a O', mientras que todos los demás estarán una distancia mayor de O'; y esto nunca ocurre en un círculo, pues en él todos los puntos equidistan del centro.

En efecto, (¿recuerdas la idea de la película?) sólo imagina que comienzas a partir de un plano perpendicular al eje de rotación, luego poco a poco ve inclinando el plano: dicha inclinación se realiza por efecto de una rotación del plano con respecto a una recta contenida en el mismo (eje de rotación). A través de este proceso de inclinar gradualmente al plano, podrás visualizar cómo hay dos puntos que permanecen fijos: la intersección m_1 y m_2 del cilindro con la recta del plano que actúa como eje de rotación (ver Fig.4.28).

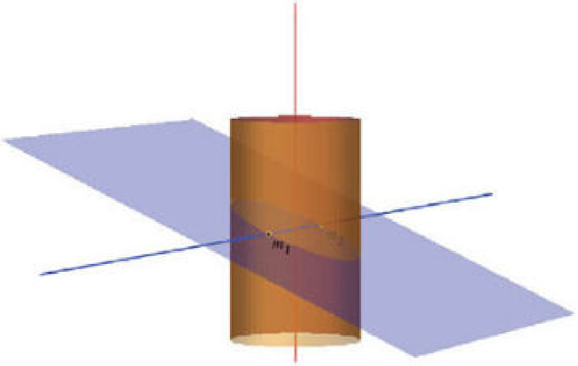


Fig. 4.28 Dos puntos permanecen fijos: la intersección m y m_2

ESFINGE

Actividad grupal

Trabajen a escala grupal en la discusión y resolución de la siguiente situación: Supongan que en vez de colocar el cilindro verticalmente (parado), lo colocan de forma horizontal (acostado) sobre un plano horizontal. Luego imaginen que el plano comienza a elevarse, pero sin dejar de ser ortogonal al eje de rotación.

- ¿Qué figuras se forman en la intersección? (Fig. 4.29).

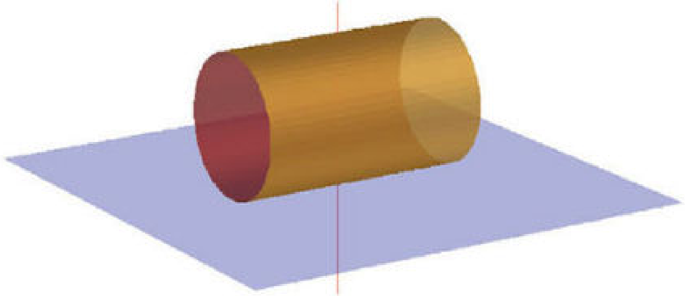
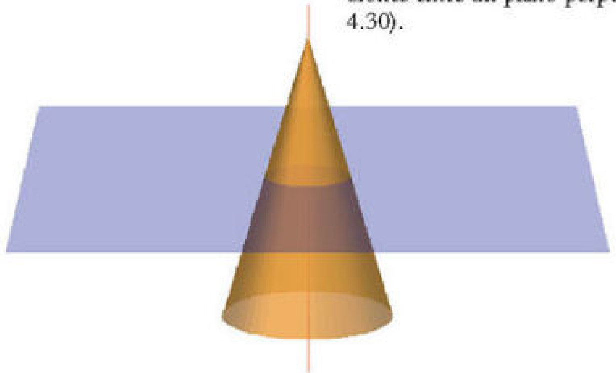


Fig. 4.29 Describan qué figuras se forman.

- De igual manera pueden proceder con el cono recto: visualizando las intersecciones entre un plano perpendicular al eje de rotación y el cono (ver figura 4.30).



A diferencia del cilindro, dichas intersecciones serán circunferencias cuyo radio irá variando según la altura a la que se encuentre el plano. Por ejemplo, si el plano está a la misma altura del cono, se obtiene (con base en la ilustración) un único punto de intersección: el vértice del cono (ver figura 4.31).

Fig. 4.30 Visualicen las intersecciones entre el plano perpendicular y el eje de rotación.

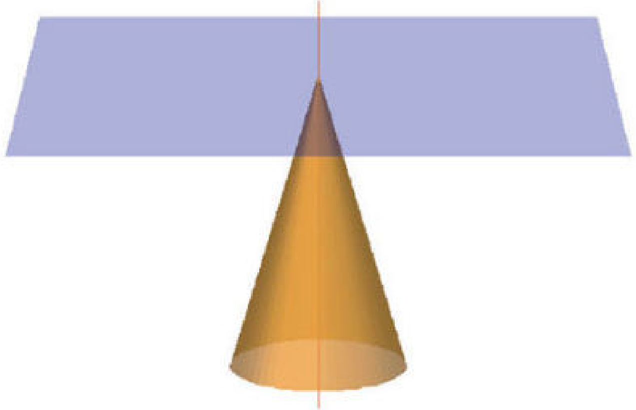


Fig. 4.31 Cuando el plano está a la misma altura que el cono .

Mientras que al ir disminuyendo la altura del plano (con respecto a la base del cono), se obtienen circunferencias de radio cada vez mayores, hasta alcanzar un radio máximo cuando llega a la base del cono, coincidiendo ambas circunferencias (ver figura 4.32).

Fig. 4.32 Visualicen al plano perpendicular disminuyendo de altura.

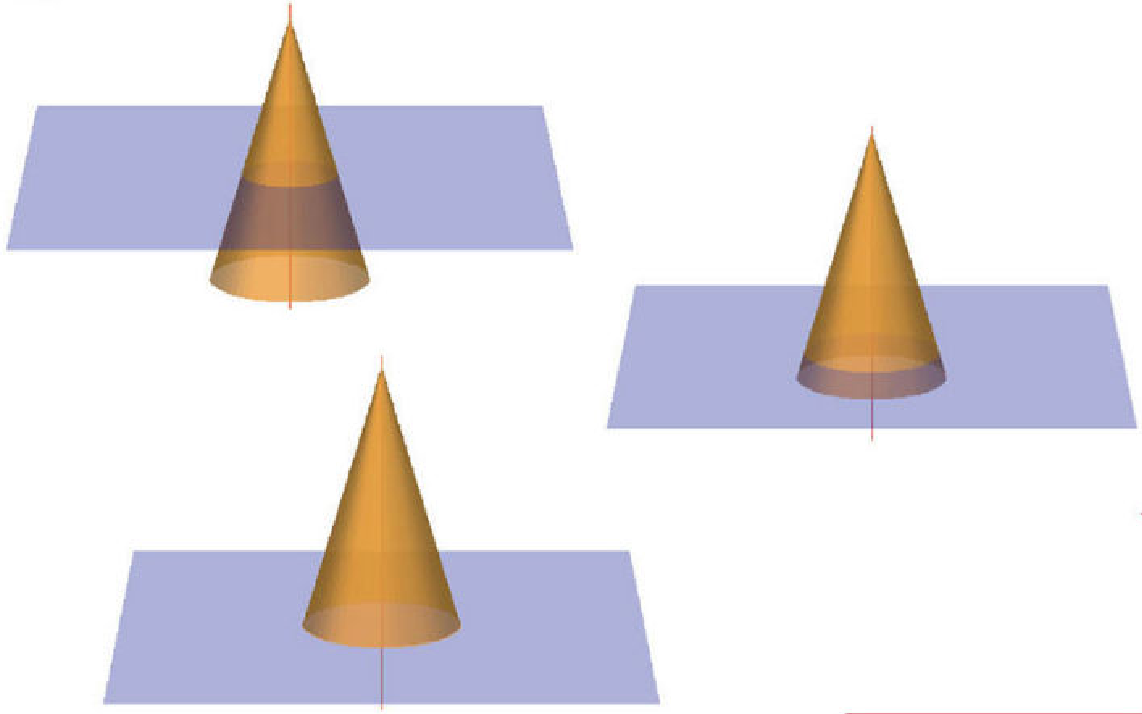
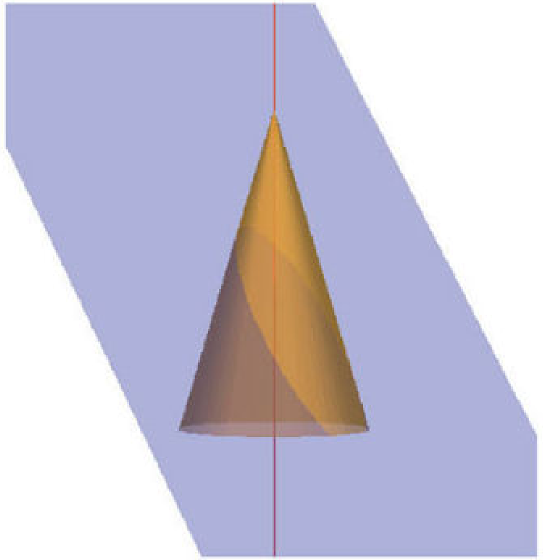


Fig. 4.33 Plano transversal al eje de rotación.



Planos transversales al eje de rotación generan curvas que no son círculos. Distintas también a las que se obtienen por planos paralelos al eje de rotación en intersección con el cono (ver figura 4.33).

Todas estas curvas así obtenidas son llamadas *curvas cónicas*. Mismas que, dependiendo del ángulo de inclinación del plano y del ángulo de conicidad, se dividen en: *hipérbole*, *parábola*, *elipse* y *círculo*.

- Mediante una dinámica a escala grupal, escriban sus conclusiones en el pizarrón bajo la guía de su docente.

Lección 4.3

Valor de la pendiente de una recta, valor del ángulo que se forma con la abscisa y cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Medida.

Actividad individual

Conocimientos previos

En esta lección es necesario recordar algunos conceptos que has visto anteriormente, tales como Plano cartesiano, abscisa y ordenada; Ángulo agudo e hipotenusa; Cateto, cateto opuesto y adyacente.

- Retoma tus libros de texto de Matemáticas de cursos anteriores y revisa los conceptos mencionados.
- Comparte la información recabada con algunos estudiantes de tu grupo.
- Solicita apoyo de tu docente para esclarecer las dudas; comparte tu trabajo con el resto del grupo.

Trabaja de manera individual en la siguiente actividad. En la figura 4.34 (se muestra en la siguiente página), se ve a un ciclista sobre un camino ondulado, mismo que debe recorrer para llegar al final del trayecto. Es posible imaginar que se tienen variaciones de velocidad:

- Colorea con rojo las secciones del camino en donde el ciclista tiene mayor velocidad.
- Colorea con azul la sección en que tiene menor velocidad.
- Pon una equis en los lugares donde sería el mejor sitio para descansar.

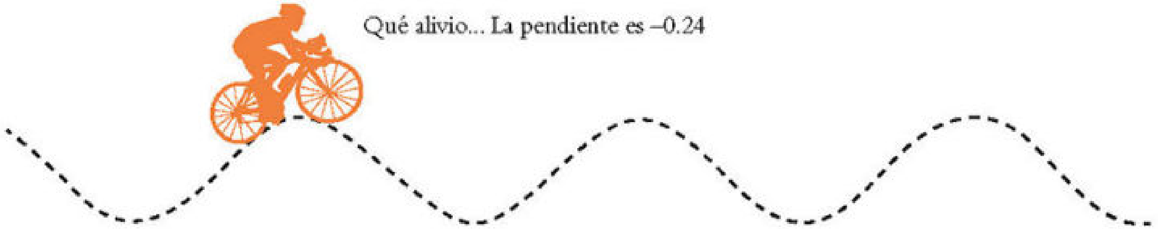


Fig. 4.34 Ciclista sobre camino ondulado.

- ¿Qué pasaría si el ciclista dejara de pedalear? ¿Dónde terminaría?

- La parte más baja del camino ondulado, ¿sería también un buen lugar para descansar y tomar fuerzas para continuar el recorrido? Explica por qué.

- ¿Será necesario aumentar o quitar algunas equis de tus marcas iniciales? De ser así, realízalas en la figura 4.35.

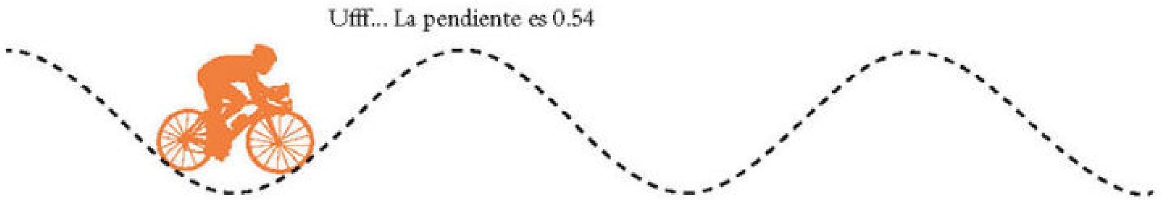


Fig. 4.35 Ciclista ante la pendiente.

- Compara tu trabajo con el de otros estudiantes; argumenta para defender tus respuestas. Busca asesoría de tu docente para esclarecer dudas.

Actividad en parejas

Ahora trabajen en parejas para analizar y resolver la siguiente situación.

Imaginen que pueden representar mediante una línea recta la vista del ciclista, de modo que sea posible indicar la dirección en la que está viendo cuando la bicicleta se encuentra justo sobre los puntos marcados en el camino ondulado.

- Observen con detenimiento la figura 4.36.

Fig. 4.36 El ciclista invierte un menor esfuerzo.

- Traza con color rojo la vista del ciclista con la que realizará un menor esfuerzo al pedalear si se encontrara sobre los puntos marcados.
- Traza con color azul la vista del ciclista en la que realizará un mayor esfuerzo al pedalear si se encontrara sobre los puntos marcados.
- Traza con un color diferente la vista del ciclista en los lugares de descanso marcados con puntos en la línea ondulada (Fig. 4.37).

Fig. 4.37 Lugares de descanso sobre el camino ondulado.

Si no tuvieran colores, ¿cómo distinguirían las rectas en las que se representa: mayor esfuerzo, menor esfuerzo y nada de esfuerzo?

- Completen la tabla 4.7.

Mayor esfuerzo	Menor esfuerzo	Nada de esfuerzo

Tabla 4.7

- ¿Cómo podrían clasificar a la recta que se genera con la visión del ciclista? Discútanlo con otros estudiantes.
- ¿Cómo llamamos a la inclinación que genera la vista del ciclista?
- Mediante una dinámica a escala grupal, discutan sus respuestas y alcancen conclusiones comunes bajo la asesoría de su docente.

A la recta que se genera con la vista del ciclista la clasificaremos según su inclinación. A esta clasificación se le conoce con el nombre de pendiente, y se representa con la letra *m*.

Sabías que...

Los antiguos egipcios y los babilonios ya conocían los teoremas sobre las proporciones de los lados de los triángulos semejantes.

Los astrónomos babilonios llevaron registros detallados sobre la salida y puesta de las estrellas, el movimiento de los planetas, los eclipses solares y lunares, todo lo cual requiere la familiaridad con la distancia angular medida sobre la esfera celeste.

Existen también registros en donde se especula una cierta interpretación de la tablilla babilónica llamada Plimpton 322, en la que hoy día se debate acerca de si se trata de una tabla de ternas pitagóricas, una tabla de soluciones de ecuaciones de segundo grado o una tabla trigonométrica (Fig. 4.38).

Fig. 4.38 Tablilla babilónica - Plimpton 322.

Actividad en equipo

Formen equipos de trabajo para desarrollar la siguiente actividad que involucra el uso de las TIC:

Uso de las TIC

- Abran el siguiente link: http://geogebratube.org/student/m7063

- Tomen el punto verde con el cursor del ratón para mover la bicicleta.
- Observen la rueda delantera de la bicicleta para advertir el modo en que ahora se genera la recta con el trayecto de esa rueda.

Consideren los valores que toma la *pendiente* $= m$ en el recorrido del camino y hagan lo que se indica a continuación.

- Anoten siete de los valores que va tomando la recta que se genera con la rueda del ciclista cuando requiere un menor esfuerzo.

- ¿Cómo son estos valores?

- ¿Qué inclinación tiene la recta en esos valores?

- Anoten siete de los valores que va tomando la recta que se generan con la rueda del ciclista cuando requiere un mayor esfuerzo.

- ¿Cómo son estos valores?

- ¿Qué inclinación tiene la recta en esos valores?

- ¿Cómo son las rectas cuando la pendiente es cero?

- ¿A qué se debe esto? Justifiquen su respuesta.

- Comparen sus respuestas con las de otros equipos, identifiquen las divergencias y discútanlas. Expongan ante el grupo sus resultados y argumentos, bajo la guía de su docente.

Actividad individual

A continuación se muestran algunas rectas en diferente posición (Fig. 4.39).

- Clasifícalas utilizando los siguientes símbolos "+, –, 0", según corresponda a la pendiente y su inclinación.

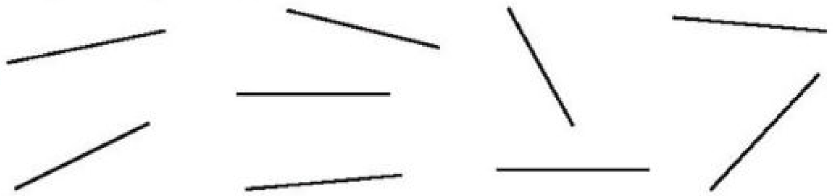


Fig. 4.39 Rectas.

Uso de las TIC

Abre el siguiente link: geogebratube.org/student/m118549

- Observa la recta junto con los valores que va tomando la pendiente.
- Comprueba la clasificación que realizaste y pon una ✔ si coinciden con los que presenta la aplicación y marca con una ✖ los que no coinciden.

Los valores que va tomando la pendiente en la aplicación son justamente calculados por un software especializado, el cual arroja los valores que va tomando la recta al inclinarse.

- Busca un patrón para clasificar de alguna manera los diferentes tipos de inclinación que puede tomar dicha recta, de modo que puedas saber su inclinación antes de verla. ¿Cómo sería dicha clasificación?

- Compara tu respuestas con las de otros estudiantes; pide asesoría a tu docente.

Uso de las TIC

Abre el siguiente link: http://www.geogebratube.org/student/m88953

- Aquí aparece la letra b, ¿qué pasa cuando mueves el deslizador de b?

La letra b es llamada ordenada al origen, indica el lugar por donde pasa la recta en el eje vertical, también conocido como eje y.

- ¿Tiene algo que ver el parámetro m cuando mueves el parámetro b?

- Explica por qué.

- Según el razonamiento y clasificación que ya tenemos de la pendiente, y al conocer qué pasa con la ordenada al origen m y b, elabora un bosquejo aproximado de las rectas sobre el eje coordenado con la información que se te brinda en la figura 4.40 ubicada en la página siguiente.

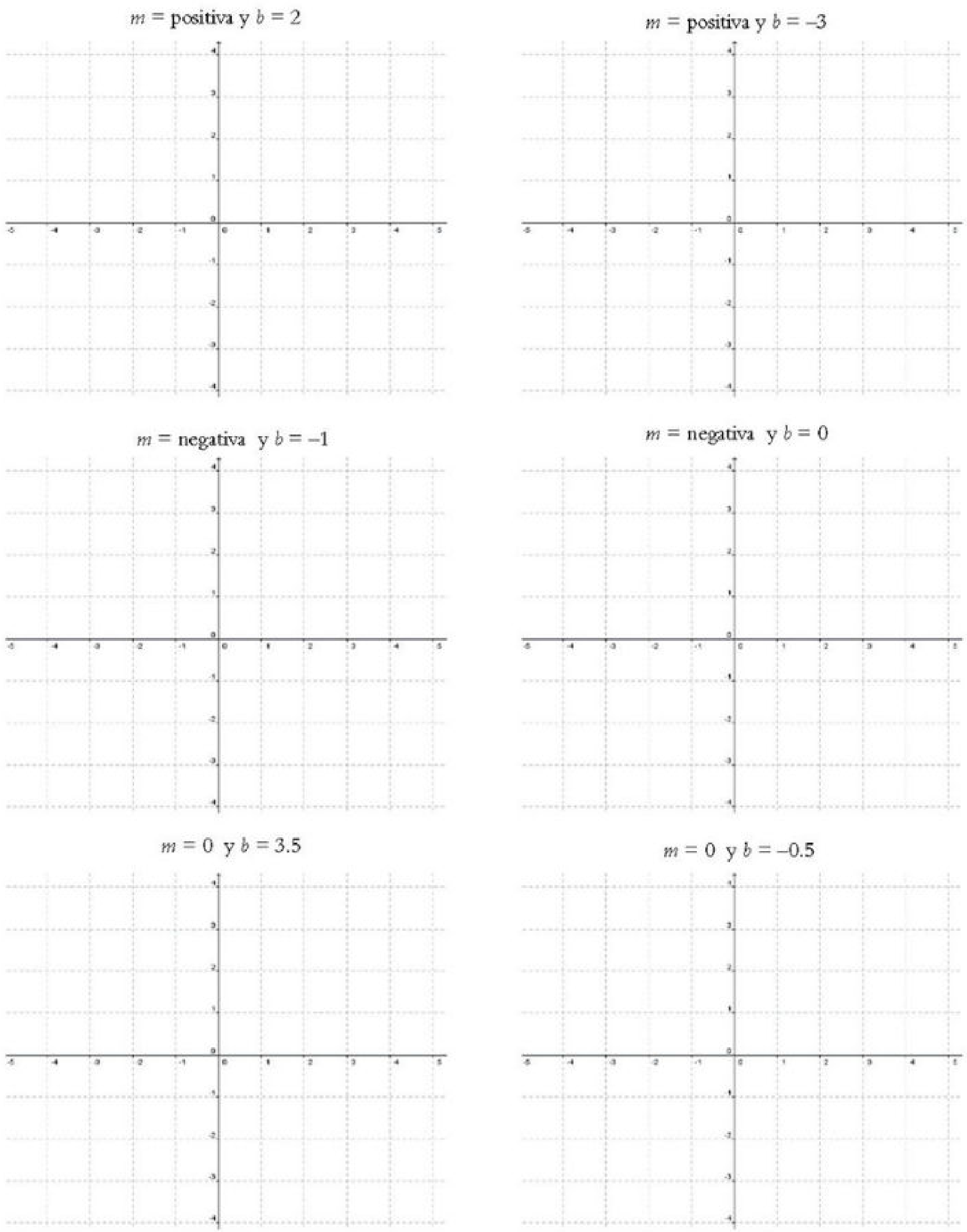


Fig. 4.40 Ejes de coordenadas.

- Ahora imagina que puedes representar la vista del ciclista con una línea recta, de manera que indiques la dirección en la que está viendo cuando la bicicleta se encuentra justo sobre los puntos marcados en el camino ondulado.

Ya puedes representar el comportamiento de la recta en el plano con la fórmula general $y = mx + b$, para continuar con el siguiente razonamiento.
Al conocer cómo afecta la pendiente y la ordenada al origen a la recta, podemos auxiliarnos de esos parámetros para entender lo que sucede si se piensa ahora en triángulos.

Actividad en parejas

Trabajen en parejas. En la figura 4.41 pueden observar la recta $y = x + 2$.

La pendiente es 1, la cual está inclinada a la derecha, y la ordenada al origen es 2; si formas dos triángulos con ayuda del eje x y el eje y, puedes ver que se forma un ángulo que es el mismo para ese cateto en ambos triángulos, por lo tanto, ambos triángulos son semejantes.

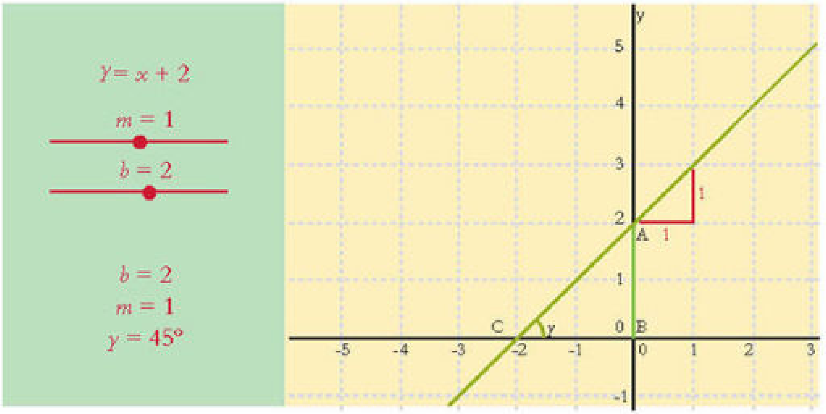


Fig. 4.41 Reproduzcan los trazos en sus cuadernos.

- ¿Qué ocurre al dividir la longitud del cateto opuesto entre la longitud del cateto adyacente de los triángulos que se formaron?
- La razón resultante, ¿es el valor de la pendiente? Expliquen por qué.
- Dibujen en su cuaderno cinco triángulos rectángulos que se formen con esta recta de modo que sea parte de la hipotenusa de sus nuevos triángulos y verifiquen el comportamiento de la pendiente.
- Con su transportador midan los ángulos interiores.
- Compartan sus respuestas con el resto del grupo; pidan asesoría a su docente para resolver las dudas y alcanzar conclusiones comunes.

Relaciones de los triángulos rectángulos

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Medida.

Actividad individual

Emprende la actividad de manera individual. Siguiendo la lógica de la lección anterior, grafica en tu cuaderno la recta $y = \frac{1}{2} + 1$, y haz lo que se indica:

- Determina la medida del ángulo que se forma al cruzar la recta con el eje de las x.
- Construye tres triángulos rectángulos considerando un segmento de la recta como hipotenusa de los mismos, y que los catetos sean paralelos a los ejes del plano cartesiano.
- Identifica los catetos opuestos y adyacentes de tus triángulos rectángulos, usa como referencia el ángulo que mediste anteriormente.
- Obtén la pendiente planteando el cociente:

$$m = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$$

- Ahora sigue el proceso inverso: forma líneas que estén a 30°, 45° y 60°, y encuentra sus pendientes mediante la construcción de un triángulo rectángulo. Valida tus cálculos con tus compañeros y docente.

- Analiza la gráfica de la recta $y = 2x + 1$ (ver figura 4.42).

Notas:
- *Cateto opuesto* = *CO*
- *Cateto adyacente* = *CA*
- *Hipotenusa* = *H*

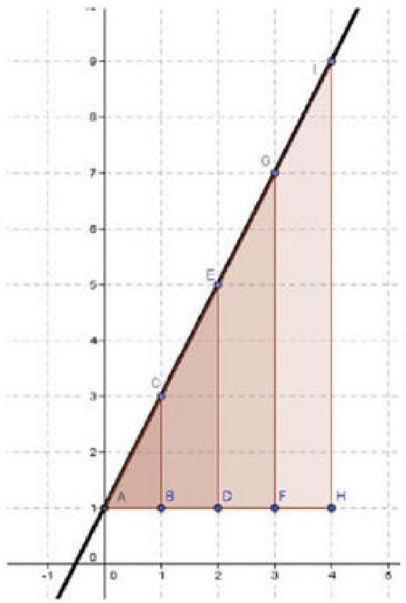


Fig. 4.42 Reproduce la figura en tu cuaderno.

- Elabora los cálculos necesarios para completar los datos de la tabla 4.8.

Triángulo	Ángulo A	CO	CA	H	razón=$\frac{CO}{H}$	razón=$\frac{CA}{H}$	razón=$\frac{CO}{CA}$
ABC							
ADE							
AFG							
AHI							

Tabla 4.8

Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Cómo es la razón dada por el cociente $\frac{CO}{H}$ en todos los triángulos?
- ¿Cómo es la razón dada por el cociente $\frac{CA}{H}$ en todos los triángulos?
- ¿Cómo es la razón dada por el cociente $\frac{CO}{CA}$ en todos los triángulos?
- ¿Qué datos tienen en común los triángulos?
- ¿Crees que tenga algo que ver el ángulo A en los triángulos? ¿Por qué?
- Compara tus respuestas con las de otros estudiantes, expón tus argumentos.
- Bajo la guía de su docente, escriban en el pizarrón las respuestas correctas.

Actividad grupal

Comenten a escala grupal el siguiente planteamiento, bajo la guía de su docente.

Las razones que obtuvieron en la actividad anterior siempre dan el mismo resultado cuando hacen referencia a un ángulo; así, constituyen herramientas que reciben el nombre de **razones trigonométricas**, porque nos permiten obtener el cociente que se establece entre los lados de un triángulo rectángulo. Se clasifican de la siguiente manera:

Dado un ángulo *A*, (Fig. 4.43) sus relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo dado son:

$$\text{seno } A = \frac{CO}{H}$$

$$\text{coseno } A = \frac{CA}{H}$$

$$\text{tangente } A = \frac{CO}{CA}$$

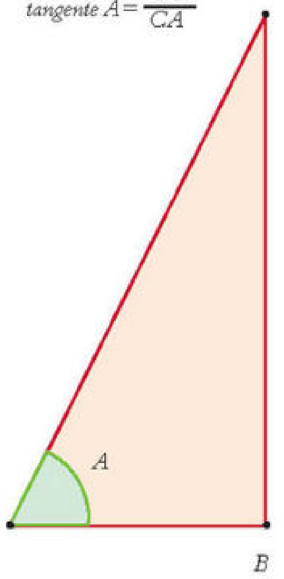


Fig. 4.43 Triángulo rectángulo.

Glosario

Razones trigonométricas.
a) Seno. En un triángulo rectángulo se define como seno de un ángulo agudo al valor obtenido al dividir la longitud del cateto opuesto al ángulo entre la longitud de la hipotenusa.
b) Coseno. Se define como coseno de un ángulo agudo al valor obtenido al dividir la longitud del cateto contiguo al ángulo entre la longitud de la hipotenusa.
c) Tangente. Se define como tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo al valor del cociente obtenido al dividir la longitud del cateto opuesto entre la longitud del cateto contiguo.

- Verifiquen sus resultados utilizando una calculadora científica que tenga la tecla *sen* o *sin*.
- Si su calculadora maneja esa notación, pueden encontrar el valor del seno, coseno y tangente del ángulo A que trabajaron en la actividad anterior.
- Con la asesoría de su docente, escriban en el pizarron los cálculos definitivos, expliquen el procedimiento para obtenerlos y aclaren las dudas.

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Medida.

Actividad individual

Conocimientos previos

En esta lección requerirás recordar definiciones, conceptos y criterios de triángulos congruentes y semejantes, así como tus habilidades para la construcción de figuras con regla y compás.

- Consulta tus libros de texto de Matemáticas de cursos anteriores y revisa las lecciones que abordan estos temas.
- Comparte con otro estudiante este repaso y consulta a tu docente para esclarecer cualquier duda.

Trigonometría

Hasta el momento, para referirnos a un triángulo cualquiera había sido suficiente identificarlo mediante sus vértices. Vamos a introducir algunos cambios en la forma de hacerlo.

- Observa este primer triángulo, no es uno cualquiera, ¿de cuál se trata? Trázalo en tu cuaderno.

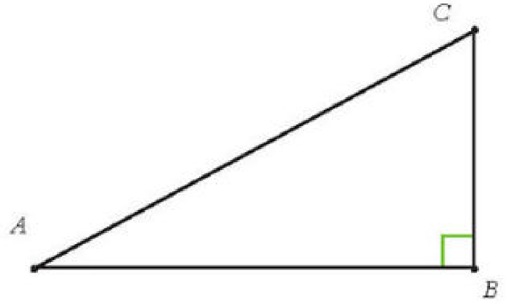


Fig. 4.44 ¿De qué triángulo se trata?

Es un triángulo rectángulo ΔABC (ver figura 4.44).

- Observa que sólo uno de sus tres ángulos interiores está señalado: el ángulo recto $\measuredangle CBA$.
- De ahora en adelante debemos tener esto muy presente.

Vamos a distinguir uno de sus dos ángulos restantes, identificándolo con una letra griega.

- Por ejemplo, indica en tu dibujo el ángulo $\measuredangle BAC$ con la letra γ, como en la figura 4.45.

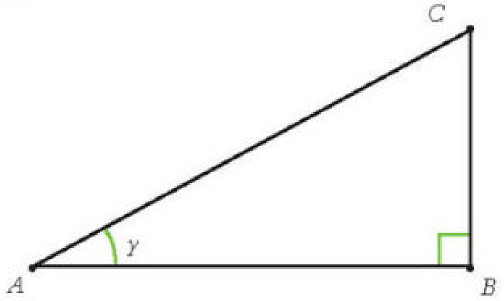


Fig. 4.45 Distingamos uno de sus dos ángulos.

Luego, utilizando como referencia al ángulo γ:

- Identifica en tu dibujo los lados del triángulo, como se ve en la figura 4.46.

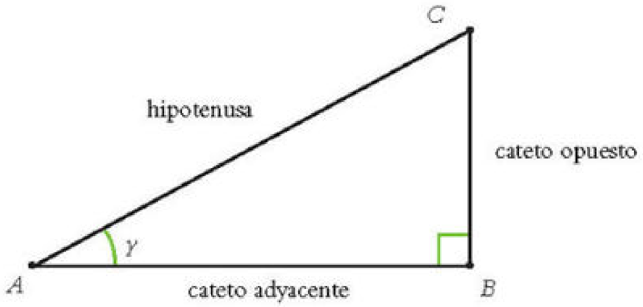


Fig. 4.46 Identifiquemos los lados del triángulo.

Contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se llama al lado AB por ser adyacente al ángulo γ?
- ¿Cómo se llama al lado BC por ser opuesto al ángulo γ?
- ¿Cómo se llama al lado AC, el mayor en todo triángulo rectángulo?
- Comparte tus respuestas con otros estudiantes y con tu docente.

Recuerda

Teorema de Pitágoras. Dado un triángulo rectángulo ΔABC (ver Fig. 4.51), la siguiente igualdad se cumple: $h^2 = a^2 + o^2$.

¿Recuerdas el *teorema de Pitágoras*? En algunos libros se refieren a los catetos como lado adyacente y opuesto.

- ¿Tú qué prefieres? Coméntalo con tus compañeros.
- ¿Qué pasaría si hubiéramos optado por distinguir al ángulo $\measuredangle ACB$?
- Realiza el trazo en tu cuaderno y escribe los nombres de los lados.
- ¿Obtuviste algo semejante a la figura 4.47?

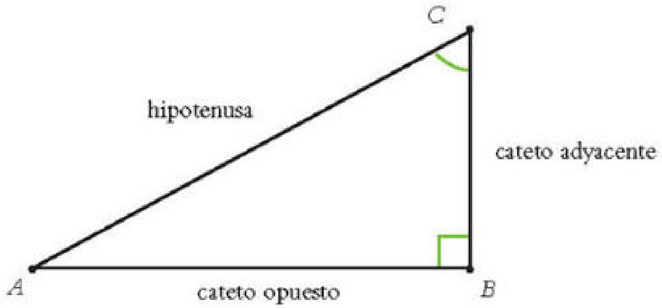


Fig. 4.47 ¿Se parece a tu dibujo?

Un simple cambio de interpretación, pero la estructura es la misma:

- Si ahora el ángulo distinguido fuera $= \measuredangle ACB$, ¿cuál sería el cateto adyacente? ¿Y el cateto opuesto? Dibuja los trazos e indícalos.

Mientras que la hipotenusa seguirá asociada al mismo lado: el lado más largo del triángulo rectángulo.

Las definiciones y resultados que estudiemos no dependerán del ángulo distinguido. El ángulo recto no se toma como referencia directa, los ángulos agudos sí.

En suma, por facilidad podemos abreviar los nombres de los catetos mediante las letras a y o, según sean adyacentes u opuestos. La hipotenusa se abrevia con la letra h.

Para un triángulo rectángulo como el de la figura 4.48, vamos a expresar las siguientes razones $\frac{o}{h}$, $\frac{a}{h}$ y $\frac{o}{a}$. Estos valores dependen de las longitudes del triángulo. Lo que no será tan evidente, es que pueden depender sólo del ángulo .

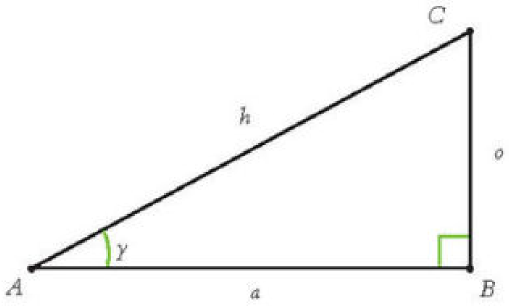


Fig. 448 Expresión de razones en un triángulo rectángulo.

Sabías que...

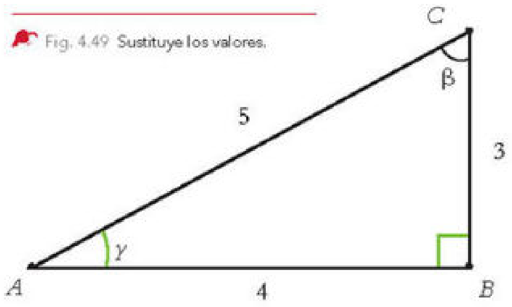
La trigonometría (del griego «trígonos», triángulo, y «metron», medir) es una de las ramas matemáticas más antiguas. Versa sobre las relaciones entre longitudes y ángulos de un triángulo, y sus respectivas funciones trigonométricas tales como seno, coseno y tangente.

Actividad en parejas

Formen parejas de trabajo y dibujen en su cuaderno los triángulos correspondientes y calculen los cocientes $\frac{o}{h}$, $\frac{a}{h}$ y $\frac{o}{a}$, para los siguientes valores de o, a y h:

1. $o = 3$, $a = 4$, $h = 5$.
2. $o = 5$, $a = 12$, $h = 13$.
3. $o = 7$, $a = 24$, $h = 25$.
4. $o = 8$, $a = 15$, $h = 17$.
5. $o = 9$, $a = 40$, $h = 41$.

Fig. 4.49 Sustituye los valores.



Para el triángulo de la figura 4.49, al sustituir los valores:

$\frac{o}{h} = \frac{3}{5}$

$\frac{a}{h} = \frac{4}{5}$

$\frac{o}{a} = \frac{3}{4}$

- ¿Estas razones serán distintas si se calculan a partir de un triángulo con medidas $o = 6$, $a = 8$, $h = 10$, semejante al de la figura 4.49?
- Discútanlo con otros estudiantes y con su docente; expresen sus argumentos para sustentar sus opiniones.

Por la importancia que estas razones trigonométricas tendrán para nosotros, vamos a definirlas y abreviarlas como sigue:

- El seno del ángulo γ
  $sen\ (\gamma) = \frac{o}{h}$
- El coseno del ángulo γ
  $cos\ (\gamma) = \frac{a}{h}$
- La tangente del ángulo γ
  $tan\ (\gamma) = \frac{o}{a}$

También podemos referirnos a ellas como **funciones trigonométricas**.

Observen cómo todas están en términos del ángulo γ. De momento, la razón es para indicar el ángulo del triángulo que usaron como referencia, pues si cambias de ángulo el cociente no tiene por qué ser el mismo. Por ejemplo, para el triángulo de la figura 4.49, el $sen\ \gamma = \frac{3}{5}$, y el $sen\ \ = \frac{4}{5}$.

Glosario

Funciones trigonométricas. Grupo de funciones que relacionan un ángulo agudo en un triángulo rectángulo con las relaciones de los lados. Son el seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Actividad en equipo

Organicen equipos para emprender esta actividad. Dibujen en su cuaderno un triángulo rectángulo ΔABC (ver figura 4.49); dibujen otro triángulo $\Delta A'B'C'$ de lados o', a' y h', que sea semejante al primero.

- Con base en ello, completen la tabla 4.9:

	ΔABC	$\Delta A'B'C'$
$sen\ (\gamma)$	$\frac{o}{h}$	
$cos\ (\gamma)$		
$tan\ (\gamma)$		$\frac{o'}{a'}$

Tabla 4.9

- Calculen ahora las razones trigonométricas, dados (o, a, h) y (o', a', h').
- Y con los datos obtenidos completen, para cada caso, una tabla similar a la anterior:

1. (39, 80, 89) y (78, 160, 178)
2. (13, 84, 85) y (26, 168, 170)
3. (11, 60, 61) y (55, 300, 305)

- ¿Cómo resultaron las razones trigonométricas de un triángulo con respecto a las del triángulo semejante? Expliquen su respuesta.
- Comenten sus reflexiones con otros equipos, luego con el grupo completo y con su profesor. Escriban en el pizarrón las conclusiones.

Como habrás notado, dado un triángulo, sus razones son las mismas si se calculan con respecto a las de cualquier otro triángulo semejante, ya que dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales. Por lo tanto, el valor de las razones trigonométricas de un triángulo dado es el mismo para todos los triángulos semejantes.

Recuerda

En una familia de triángulos semejantes, las razones trigonométricas no cambian: son constantes.

La diferencia que hay entre una familia de triángulos semejantes y otra, está dada por los ángulos internos de los triángulos, es decir: basta con variar uno de los tres ángulos internos para generar una nueva familia.
En nuestro caso, al trabajar con triángulos rectángulos, solamente dos ángulos (los agudos) son los que vamos a variar, el ángulo recto siempre quedará fijo.

Actividad individual

Considera un triángulo rectángulo como el de la figura 4.50.

- Completa la siguiente tabla, sin utilizar el teorema de Pitágoras.
- Cada renglón de la tabla 4.10 representa un triángulo rectángulo distinto.

o	a	h	sen (y)	cos (y)	tan (y)
		20	0.6	0.8	
5			$\frac{10}{26}$		$\frac{45}{108}$
	7			$\frac{21}{29}$	$\frac{20}{21}$
1.8		4.25		$\frac{77}{85}$	

Tabla 4.10

Contesta las preguntas:

- ¿Son semejantes todos los triángulos rectángulos que tengan un mismo ángulo agudo y en común? Explica tu respuesta.
- Recuerda el criterio de semejanza AA para exponer tus argumentos.
- Contrasta tus respuestas con las de otros estudiantes; discutan las diferencias de opinión con base en razonamientos. Soliciten asesoría a su docente.

En la figura 4.50 se ve cómo varios triángulos rectángulos semejantes comparten el ángulo y formado por los rayos L_1 y L_2.

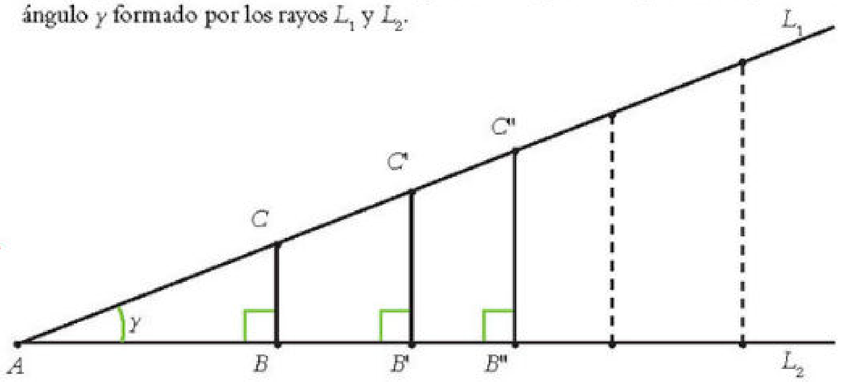


Fig. 4.50 Varios triángulos rectángulos comparten el mismo ángulo.

Si te pidieran calcular el valor de una razón trigonométrica para un ángulo dado y, por ejemplo, el seno de treinta grados [sen(30°)], pero sin conocer las medidas de h y o en un triángulo rectángulo donde fuera uno de sus ángulos. ¿Qué podrías hacer al respecto?

Puedes utilizar tu calculadora y escribir en ella el valor del ángulo (por ejemplo, 30°) y luego seleccionar la razón trigonométrica a evaluar (también puedes consultar el resultado en una tabla trigonométrica).

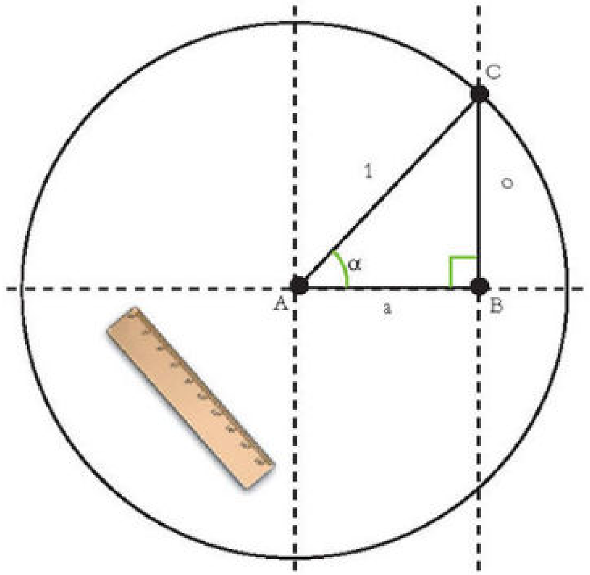
También puedes construir un triángulo rectángulo tal que uno de sus ángulos internos mida y, luego medir las longitudes de la hipotenusa y del cateto opuesto (o adyacente, según la función) y calcular su cociente.

Actividad en parejas

Organizados en parejas, dibujen la construcción recomendada por su simplicidad (ver figura 4.51).

- Tracen un círculo de radio igual a uno.
- Con el transportador, tomando como horizontal al eje x y como origen al centro A del círculo, marquen sobre la circunferencia el punto C que corresponda al ángulo y.
- Para C, tracen una recta perpendicular al eje x y marquen el punto B en su intersección con el eje.
- Por último, tracen el triángulo rectángulo ΔABC y midan las longitudes de los catetos que necesiten; recuerden que por construcción su hipotenusa mide uno.
- Comparen su construcción con las de otros compañeros; corrijan si es necesario. Pregunten a su docente.

Fig. 4.51 Reproduzcan los trazos en sus cuadernos.



Ahora supongamos que el seno de un ángulo y (que no conoces) es igual a un número dado P (por ejemplo, $P = 1$). Te piden determinar el ángulo y tal que el seno de y es P. ¿Qué podemos hacer?

Por ejemplo, si sen $y = 1$, entonces, ¿a qué es igual y?

En trigonometría existe un conjunto de cálculos conocidos como funciones trigonométricas inversas. Para cada función sen (y), cos (y), o tan (y), existen las respectivas funciones inversas sen^{-1}, cos^{-1} y tan^{-1}. Las cuales, entre otras cosas, sirven para responder a situaciones como las del ejemplo anterior.

Si bien es cierto que en este momento su estudio formal está lejos de nuestro alcance, podemos utilizar las funciones trigonométricas inversas consultando las respectivas tablas trigonométricas o haciendo uso de la calculadora.

Actividad grupal

Mediante una dinámica a escala grupal guiada por su docente, completen la tabla 4.11 haciendo uso de las tablas trigonométricas o de la calculadora.

sen (y)	cos (y)	tan (y)	a
0	1	0	0°
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	

Tabla 4.11

- Escriban en el pizarrón las respuestas correctas y expliquen, en cada caso, el procedimiento seguido para llegar al resultado.
- Resuelvan las dudas individuales ante el grupo para mejor comprensión.

Actividad grupal

Continúen con la dinámica grupal para resolver el siguiente problema; utilicen en el pizarrón para plantearlo.

Un barco de investigaciones marinas detecta con su sonar los vestigios de un naufragio romano, en un ángulo de depresión de 20°. El buzo de la expedición realiza una inmersión de 38 m hasta llegar al fondo marino.

- ¿Cuánto necesitará desplazarse el buzo sobre el lecho marino para llegar a los restos del naufragio? (Fig. 4.52).

Tal vez será necesario hacer unos despejes y posiblemente utilizar la calculadora.

- Expliquen su respuesta y describan el procedimiento que siguieron para resolver el problema.
- Resuelvan las dudas frente al grupo con el apoyo de su docente.

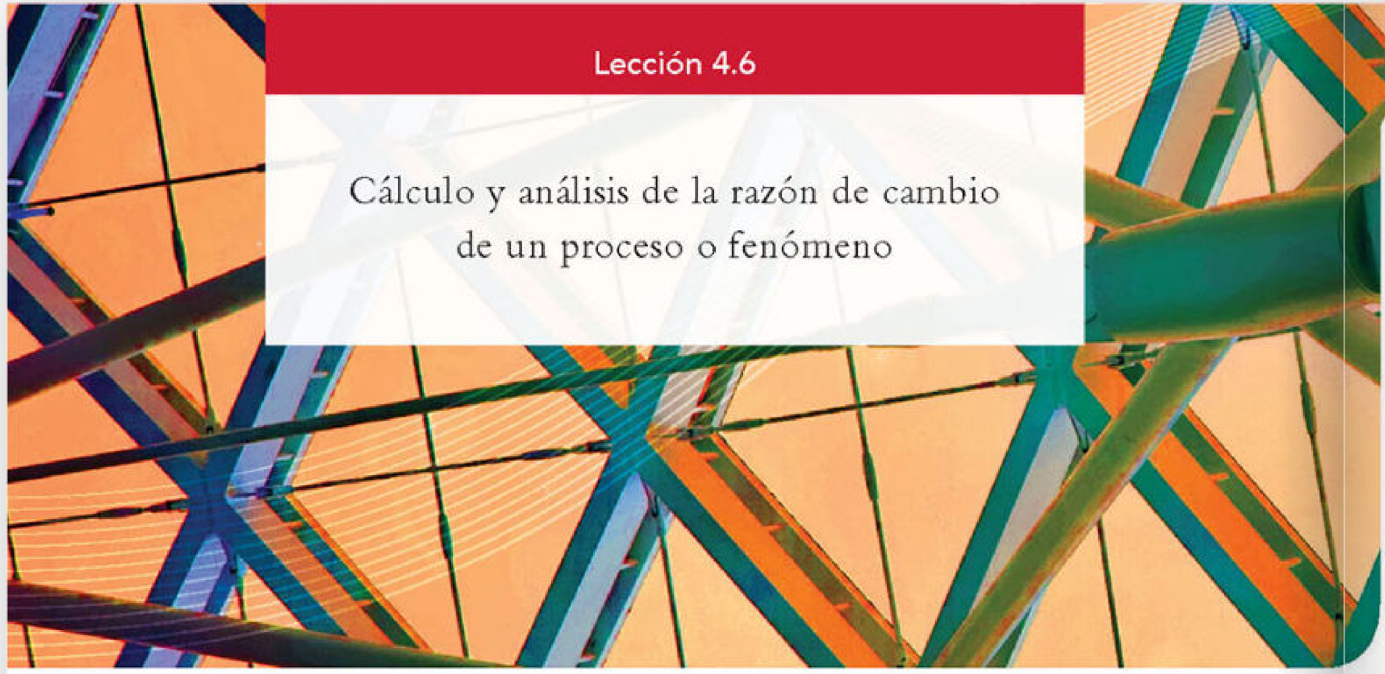
Fig. 4.52 En el problema, la superficie del mar es paralela al fondo marino.

Ejercicios y aplicaciones

De modo individual, resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas. Coméntalos con tus compañeros y realiza las correcciones necesarias en cada caso.

1. La base de un triángulo isósceles mide 27.5 cm y los lados que son iguales 19.5 cm. Calcula el valor de sus ángulos internos.
2. Determina la longitud de los lados de un pentágono regular inscrito en una circunferencia con un diámetro de 15 cm.
3. Un árbol proyecta una sombra de 6 m cuando el ángulo de elevación del sol es de 59°. Determina la altura del árbol.
4. Durante un viaje, en un tramo carretero se presenta una subida con una elevación de 10°, ¿qué altura alcanza la carretera, con respecto al horizonte, después de recorrer 25.7 m?
5. Al aproximarse el barco a tierra firme, su vigía divisa un faro, se sabe que fue construido a nivel del mar con una altura de 29.8 m. El capitán, utilizando su sextante (Fig. 4.53), mide un ángulo de 50°, tomado a partir del horizonte y en elevación hasta la punta más alta del faro. ¿A qué distancia se encuentra el barco del faro?
6. Mediante una dinámica a escala grupal, escriban en el pizarrón las respuestas, no sin antes comentar y discutir los procedimientos que siguieron; distingan, con ayuda de su docente, cuáles son los procedimientos más eficaces para llegar a respuestas correctas.

Fig. 4.53 Sextante. Instrumento de medición angular, de gran importancia en la navegación marítima.



Lección 4.6

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno

Eje: Manejo de la información.

Tema: Proporcionalidad y funciones.

Actividad individual

Conocimientos previos

Pablo y tres amigos fueron a un parque de diversiones. Pagaron $ 720 por los tres. Completa la tabla 4.12:

Personas	1	2		4		10
Precio ($)			720		1 920	

Tabla 4.12

Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto pagaron por cada boleto? ¿Cuál es la variable independiente?
- ¿Qué relación existe entre el precio de los boletos y las personas?
- Si graficas los valores de la tabla, ¿crees que obtendrás una curva o recta? Justifica tu respuesta.
- Grafica en tu cuaderno los valores de la tabla.
- Compara tu gráfica con la de tus compañeros y coméntenla con el profesor.

Actividad en parejas

Trabajen en parejas para resolver el siguiente problema. Dos autobuses de distintas líneas salen a la misma hora de la misma población y se dirigen a la misma ciudad (ver figura 4.54).

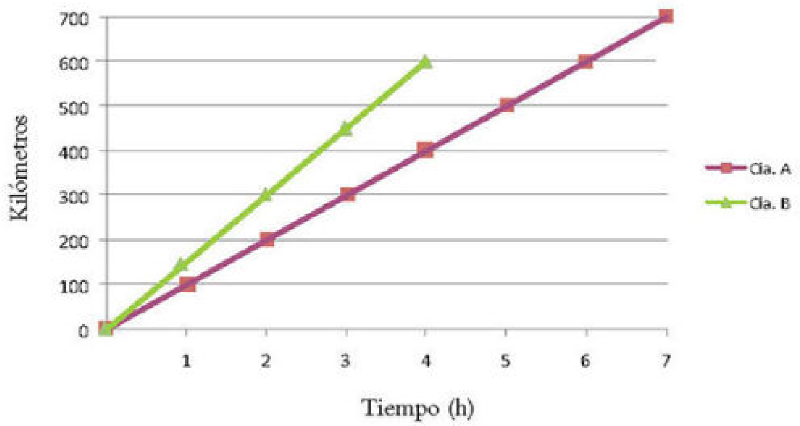


Fig. 4.54 Trayectorias de dos autobuses.

Respondan en su cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Cuán lejos quedaba la ciudad a la que llegaron?
- ¿Qué autobús llegó primero?
- De la cuarta a la quinta hora, ¿qué distancia recorrió el autobús *A*?
- De la segunda a la tercera hora, ¿qué distancia recorrió el autobús *B*?
- ¿Cuántas horas le faltaban al autobús *A* para llegar cuando el autobús *B* llegó a su destino?
- ¿A qué velocidad iba cada uno de los autobuses?

Pistas

Para que puedan contestar fácilmente las preguntas les sugerimos lo siguiente:

- Con la información de la gráfica construyan una tabla de valores.
- Recuerden que la velocidad es la relación que existe entre la distancia y el tiempo.
- Obtenga la expresión algebraica que represente la relación entre las variables de cada uno de los autobuses.
- Comenten con sus compañeros y profesor lo que observan en la tabla.
- Defiendan sus respuestas mediante argumentos y razonamientos.

Nuevos Conocimientos

En el curso pasado estudiaron la representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad $y = mx$, en donde analizaron la relación que existe entre las variables.
En la actividad que están trabajando, pudieron observar que la variable independiente es el tiempo (eje de las abscisas) y la variable dependiente es la distancia en km (eje de las ordenadas).
La recta en la gráfica indica una proporción directa, es decir, cada vez que pasa 1 h, los kilómetros se incrementan en la misma proporción.
¿Cómo pueden comparar cuál de los dos autobuses va más rápido o, dicho de otra manera, la relación de cambio en kilómetros a cambio en horas?
Para comparar cómo van cambiando dos valores y cómo se relacionan entre sí, utilicen la **razón** de cambio.

Glosario

Razón. Es la relación entre dos magnitudes. Se representa como el cociente de estas dos magnitudes y normalmente se escribe como fracción.

Regresemos a la actividad:

- Observen la figura 4.54 y completen la tabla 4.12.

	Distancia (kilómetros)	
Tiempo (*h*)	Autobús *A*	Autobús *B*
0	0	0
1	100	150
2	200	300
3		

Tabla 4.12

- Comparen esta tabla con la que construyeron en el apartado de "Pistas" y comenten con otros estudiantes y con su docente si existe alguna diferencia entre éstas. Expliquen por qué.

La razón de cambio se puede calcular a partir de los valores de la figura 4.57 o de los datos de la tabla 4.12.

Vamos a calcular las razones de cambio del *autobús A*.

- Entre la segunda y la tercera hora:

$$\frac{\textit{cambio en kilómetros}}{\textit{cambio en horas}} = \frac{300\text{ km} - 200\text{ km}}{3\text{ h} - 2\text{ h}} = \frac{100\text{ km}}{1\text{ h}} = 100\text{ km/h}$$

- Calculen las siguientes razones de cambio:

- Entre la quinta y la cuarta hora:
$\frac{\textit{cambio en kilómetros}}{\textit{cambio en horas}}$ = ______ = ______ =

- Entre la sexta y la tercera hora:
$\frac{\textit{cambio en kilómetros}}{\textit{cambio en horas}}$ = ______ = ______ =

- Entre la sexta y la primera hora:
$\frac{\textit{cambio en kilómetros}}{\textit{cambio en horas}}$ = ______ = ______ =

- Calculen las razones de cambio del *autobús B*.

- Entre la segunda y la primera hora:
$\frac{\textit{cambio en kilómetros}}{\textit{cambio en horas}}$ = ______ = ______ =

- Entre la cuarta y la segunda hora:
$\frac{\textit{cambio en kilómetros}}{\textit{cambio en horas}}$ = ______ = ______ =

- Entre la cuarta y la primera hora:
$\frac{\textit{cambio en kilómetros}}{\textit{cambio en horas}}$ = ______ = ______ =

Respondan en su cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Qué observan con respecto a las razones de cambio de ambos autobuses?
- ¿Varió la razón de cambio de alguno de los autobuses en algún momento?
- ¿A qué velocidad iba el *autobús A*?
- ¿Qué velocidad llevaba el *autobús B*?
- Representen con una ecuación la relación de tiempo-distancia de cada uno.
- Compartan sus respuestas con el resto del grupo y, bajo la dirección del docente, esclarezcan dudas y lleguen a respuestas comunes.

La razón de cambio indica el cambio relativo de una variable en relación con otra.
En esta actividad observaron que las variables están relacionadas linealmente.
Con respecto al *autobús A*, a cada unidad de tiempo le corresponden 100 km de distancia, mientras que el *autobús B* recorre por cada hora 150 km; por lo tanto, la razón de cambio en el *autobús B* es mayor.
La velocidad es la relación que existe entre la distancia y el tiempo, por lo que la velocidad del *autobús B* es mayor.

Actividad en equipo

Trabajen en equipo para resolver el siguiente problema. Tania tiene un sueldo semanal y le debe a su tía $ 2 000. Le prometió pagarle cierta cantidad semanalmente.

- Observen la siguiente gráfica (Fig. 4.55):

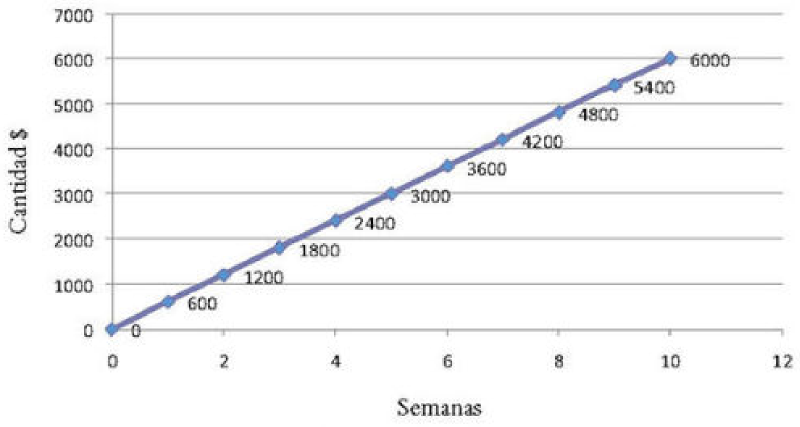


Fig. 4.55 Sueldo de Tania.

En su cuaderno respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la razón de cambio entre las semanas dos y ocho?
- ¿Y entre la cuatro y la uno?
- ¿Cuánto gana Tania semanalmente?
- Si ahorrara todo su dinero, ¿cuánto dinero debería tener en 10 meses?

Observen ahora la gráfica (Fig. 4.56) y contesten en su cuaderno las siguientes preguntas:

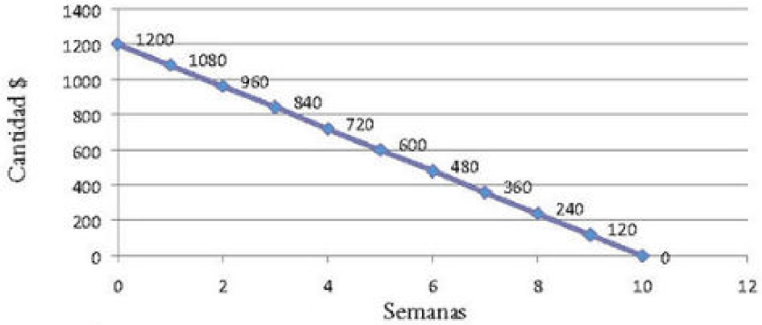


Fig. 4.56 Deuda de tía.

- ¿Cuál es la razón de cambio entre la semana dos y seis ?
- ¿Y entre la seis y la diez?
- ¿Cuánto le paga semanalmente Tania a la tía?
- ¿En cuánto tiempo le terminará de pagar?
- Compartan sus respuestas con sus compañeros y docente.

La pendiente como razón de cambio

Observen detenidamente las figuras 4.55 y 4.56. Después respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cómo es la inclinación en cada una de las rectas? ¿Por qué?

- ¿Qué sucede cuando la razón de cambio es mayor que otra, como en la actividad de los autobuses?

La pendiente de una recta es la que nos muestra la razón de cambio de la variable dependiente con respecto a la independiente.

Recuerden que la ecuación de una recta es $y = mx + b$, en donde m es la pendiente y señala qué tan inclinada está la recta.

Cuanto mayor es la pendiente de una recta, más inclinada estará, tal como lo vieron en la actividad de los autobuses.

Razón de cambio de la compañía de autobuses B > la razón de cambio de la compañía de autobuses A. La recta del recorrido del *autobús B* está más inclinada, por lo tanto, su velocidad es mayor.

¿Cómo obtenemos la pendiente de una recta?

Utilizando las coordenadas cartesianas de dos puntos, la ecuación para obtener la pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Completen la tabla 4.13 de acuerdo con las coordenadas de cada uno de los puntos de las figuras 4.55 y 4.56.

De la figura 4.55 vamos a tomar las coordenadas (2,1200) y (3,1800):

$$m = \frac{1800 - 1200}{3 - 2} = \frac{600}{1}$$

Ahora tomaremos las coordenadas (3,1800) y (4,2400):

$$m = \frac{2400 - 1800}{4 - 3} = \frac{600}{1}$$

Coordenadas		
	Sueldo	Deuda
1	(0,0)	(0,1200)
2	(2,1200)	(1,1080)
3	(3, 1800)	(2,960)
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Tabla 4.13

Esto significa que para cada unidad que aumenta la x, la y aumenta 600 unidades. La pendiente en este caso es positiva y es nuestra razón de cambio.

- Ahora tomaremos algunas coordenadas de la figura 4.56 (0,1200) y (1,1080):

$m =$ ______ – ______ $m =$ __________

- Obtengan la pendiente de los siguientes puntos: (2,960) y (3, 840):

$m =$ ______ – ______ $m =$ __________

Respondan en su cuaderno:

- ¿Cómo es la pendiente?
- ¿Qué sucede cuando la pendiente es negativa?
- ¿Cómo relacionarían la pendiente negativa con el problema?
- Justifiquen sus respuestas y compártanlas con tus compañeros y profesor.

Glosario

Depreciación. Es el valor que un objeto va perdiendo con el tiempo.

Las razones de cambio negativas generalmente se encuentran con la **depreciación** de algunos objetos como coches, computadoras, maquinaria y herramientas.

También encontrarán razones de cambio negativas en economía y finanzas, así como en la biología en control de epidemias, etcétera.

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve los siguientes problemas de manera individual; cuando hayas terminado, compara tus respuestas con otros estudiantes y expón tus razonamientos. Para alcanzar respuestas comunes, solicita apoyo del docente.

1. Laura y Luisa intentan hacer jabones en el laboratorio de Química. Para fabricar tres deben utilizar aproximadamente 180 g de aceite de oliva y 43 g de aceite de coco.
   - ¿Cuánto necesitarán de cada ingrediente para 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8 jabones?
   - En tu cuaderno elabora una gráfica y representa cada ingrediente con una línea recta.
   - Encuentra la razón de cambio entre el número de jabones y la cantidad en gramos de cada ingrediente.
   - Analiza el comportamiento de cada una de las rectas.
   - Comparte tus comentarios con tus compañeros y profesor.

2. La siguiente gráfica muestra cómo se deprecian dos autos anualmente (Fig. 4.57).

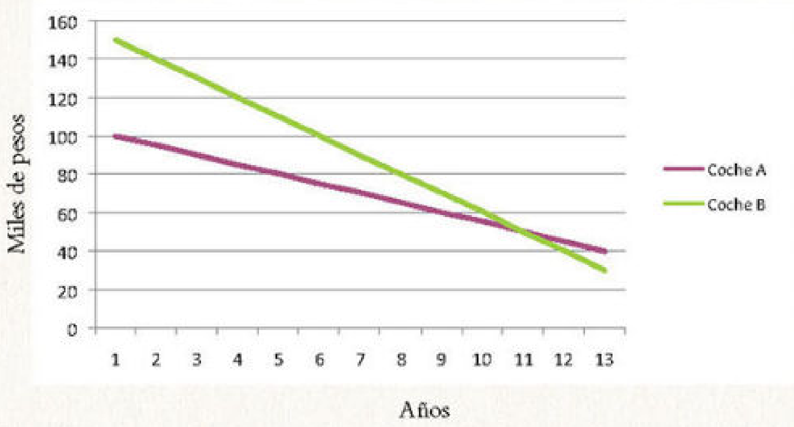


Fig. 4.57 Depreciación.

Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto costó cada uno de los coches?
- ¿Cuál es la razón de cambio del auto A?
- ¿Qué significa esa razón de cambio?
- ¿Cuál es la depreciación por año del auto B?
- Analizando la gráfica, ¿cuál de los dos autos se deprecia más rápidamente?
- ¿Cómo lo sabes? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué tienen en común las dos líneas rectas?
- ¿En qué año los dos autos valen lo mismo?

3. Un ciclista viaja a una velocidad constante. La tabla 4.14 muestra la relación que existe entre el tiempo que viaja y los kilómetros que recorre. Completa la tabla.

Horas	0	1	2	3	4	5	6	7
Kilómetros	0				36			63

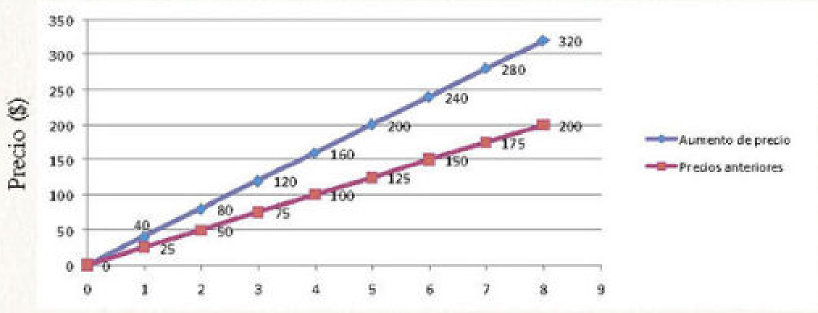
Tabla 4.14

Con los valores de la tabla, construye en tu cuaderno una gráfica y responde lo siguiente:

- Cuando aumentan las horas, ¿qué sucede con los kilómetros?
- ¿Cómo es la pendiente de la recta? Explica tu respuesta.
- Obtén la razón de cambio. Cuando aumenta el tiempo, ¿cuánto aumentan los kilómetros?

4. Santiago tiene una granja y vende huevos. Debido a la gripe aviar, el precio del huevo tiende a aumentar.

La siguiente gráfica muestra este fenómeno (Fig. 4.58):



Kilogramos

Fig. 4.58 Precio del huevo.

Trabaja en tu cuaderno.

- Calcula la razón de cambio de la cantidad de huevo en relación con su precio.
- Por cada kilogramo más de huevo que se vende, ¿cuánto más hay que pagar?
- Obtén la pendiente de los puntos (5,125) y (6, 150), que corresponden a los precios anteriores.
- Obtén la pendiente de los puntos (3,120) y (4,160).
- ¿Cuál de las rectas tiene mayor inclinación?
- ¿Qué puedes decir de las pendientes de las rectas?

5. Mediante una dinámica a escala grupal, escriban en el pizarrón las respuestas, no sin antes comentar y discutir los procedimientos que siguieron; distingan, con ayuda de su docente, cuáles son los procedimientos más eficaces para llegar a respuestas correctas.

Lección 4.7

Desviación media y rango

Eje: Manejo de la información.

Tema: Análisis y representación de datos.

Actividad individual

Conocimientos previos

En esta lección utilizaremos los conceptos de **rango** y **promedio**, pues serán necesarios para obtener información de datos generados por un muestreo; además del concepto de **valor absoluto** de un número para hacer el cálculo de la desviación media de un conjunto de datos.

- Revisa los siguientes conceptos con alguno de tus compañeros, aporta ejemplos de cada uno de ellos.

Glosario

Rango. Es la diferencia que hay entre el valor más alto y el más pequeño de una serie de datos. Permite conocer la distancia que existe entre éstos.
Ejemplo:
Dados los siguientes datos habrá que calcular el rango entre ellos: {5, 6, 8, 5, 6, 7, 9}
El menor valor es el número 5
El mayor valor es el número 9
Rango = 9 – 5 = 4

Glosario

Promedio o media aritmética. Es el valor que se genera al realizar la suma de los datos dividido entre el número total de ellos. Indica un valor medio de los datos; este estadístico también se representa con $\bar{x}$.
Ejemplo:
Con los datos anteriores hay que obtener x
La suma de los datos = 5 +5 + 6 + 6 + 7 + 8 + 9 = 46
El número o total de datos es 7
$\bar{x} = \frac{46}{7} = 6.57$
Por lo tanto $\bar{x} = 6.57$

ESFINGE

Actividad en parejas

Glosario

Valor absoluto. Consiste en tomar la parte positiva de dicho número. Es suprimir el signo si es negativo o dejarlo intacto si es positivo. Se representa con dos barras verticales indicando la operación del cambio de signo.
Ejemplo:
si $x = 5$ entonces;
$|x| = |5| = 5$
si $x = -5$ entonces
$|x| = |-5| = 5$

Organicen parejas de trabajo para resolver este problema. Consideren la siguiente serie de datos que se obtuvieron al comparar las calificaciones de Emilio, Marco y Sofía en el primer bimestre (Tabla 4.15):

Materia	Emilio	Marco	Sofía
Español	9	8	7
Matemáticas	9	7	10
Ciencias	10	9	9
Geografía	9	7	5
Idiomas	8	9	5
Computación	9	9	10
Taller	9	8	10
Música	7	9	8
Educación física	8	7	9

Tabla 4.15

Calculen los promedios que se piden a continuación, anótenlos en sus cuadernos y contesten las preguntas que se plantean.

- Promedio de Emilio.
- Promedio de Marco.
- Promedio de Sofía.
- Promedio general de los tres.
- ¿Quién obtuvo el promedio más alto?
- ¿A qué se debe esto?
- ¿Qué más pueden decir al observar los promedios individuales y de manera global? Argumenten su respuesta.
- Contrasten sus respuestas con las de otros estudiantes y discutan, con base en argumentos y razonamientos, las diferencias.
- Soliciten asesoría de su docente para analizar los procedimientos seguidos y establecer conclusiones generales.

Para obtener más información de las calificaciones, calculen la desviación media, este dato les servirá para saber cómo es la separación o dispersión de las calificaciones con respecto al promedio de Marco, Emilio y Sofía.

Para poder obtener la desviación media, que denotaremos como D, es necesario reacomodar los datos para obtener las frecuencias absolutas de las calificaciones y aplicar la fórmula siguiente:

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{N}(|x_i-\overline{x}|f_i)}{N}$$

Esta fórmula se lee como: *"la suma de los productos del valor absoluto del dato menos la media, por la frecuencia del dato, entre el total de datos"*. Hagámoslo paso a paso:

En primer lugar cuenten las frecuencias absolutas de cada calificación en una tabla (ver Tabla 4.16):

$\overline{x}$ = *Promedio total* = 8.29

x_i = *calificaciones que se tienen*

f_i = *frecuencia absoluta = total de veces que aparece cada dato*

N = *Número o total de datos*

Calificaciones x_i	f_i
5	2
6	0
7	5
8	5
9	11
10	4
Total	N=27

Tabla 4.16

- Completen la tabla 4.17 para obtener los datos necesarios y aplicar la fórmula anterior.

Calificaciones x_i	f_i	$x_i-\overline{x}$	$\lvert x_i-\overline{x}\rvert$	$\lvert x_i-\overline{x}\rvert f_i$
5	2	5 − 8.29 = −3.29	$\lvert -3.29\rvert$ = 3.29	(3.29) (2) = 6.58
6	0	6 − 8.29 = −2.29	$\lvert -2.29\rvert$ = 2.29	(2.29) (0) = 0
7	5			
8	5			
9	11			
10	4			
= *sumas*	N = 27			

Tabla 4.17

Recuerda

Al sumar los resultados de esta columna, se divide entre N=27, para obtener la desviación media.

Así es como se resuelve la fórmula $D=\frac{\sum_{i=1}^{N}(|x_i-\overline{x}|f_i)}{N}$, la cual indica qué tan dispersos o alejados están los datos con respecto a la media. Como la media es 8.29 pueden tener una idea de las calificaciones de Marco, Emilio y Sofía, en caso de no tenerlas presentes.

Ejercicios y aplicaciones

Trabaja de manera individual en tu cuaderno y elabora la gráfica de las calificaciones de Marco, Emilio y Sofía, y observa el comportamiento de esos valores con respecto a la media y la desviación media.

1. Calcula la desviación media de la siguiente serie de datos (Tabla 4.18). Elabora una gráfica poligonal para interpretar tus resultados.

5	7	10	9	8	10	15
15	14	14	1	9	11	1
7	6	3	2	14	3	3
2	4	5	6	11	7	3
11	12	5	10	6	5	12

Tabla 4.18

2. La siguiente información (Tabla 4.19) fue obtenida de la base de datos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía. El INEGI ofrece acceso a la información estadística geográfica de una gran diversidad temática y con distintos niveles de desagregación a través de productos impresos y digitales, tanto en forma gratuita como en venta. El instituto genera estadística básica que obtiene de tres tipos de fuentes: censos, encuestas y registros administrativos, así como estadística derivada mediante la cual produce indicadores demográficos, sociales y económicos, además de la contabilidad nacional.

- Analiza los datos de la siguiente tabla y calcula la desviación media para los grupos de edad que hay en el país distribuidos por sexo.

Distribución por edad y sexo			
Población total por grupo quinquenal de edad según sexo, 1950 a 2010.			
Fecha de actualización: Jueves 3 de marzo de 2011			
Grupo de edad	Total	Hombres	Mujeres
Total	112 336 538	54 855 231	57 481 307
0 a 4 años	10 528 322	5 346 943	5 181 379
5 a 9 años	11 047 537	5 604 175	5 443 362
10 a 14 años	10 939 937	5 547 613	5 392 324
15 a 19 años	11 026 112	5 520 121	5 505 991
20 a 24 años	9 892 271	4 813 204	5 079 067
25 a 29 años	8 788 177	4 205 975	4 582 202
30 a 34 años	8 470 798	4 026 031	4 444 767
35 a 39 años	8 292 987	3 964 738	4 328 249
40 a 44 años	7 009 226	3 350 322	3 658 904
45 a 49 años	5 928 730	2 824 364	3 104 366
50 a 54 años	5 064 291	2 402 451	2 661 840
55 a 59 años	3 895 365	1 869 537	2 025 828
60 a 64 años	3 116 466	1 476 667	1 639 799
65 a 69 años	2 317 265	1 095 273	1 221 992
70 a 74 años	1 873 934	873 893	1 000 041
75 a 79 años	1 245 483	579 689	665 794
80 a 84 años	798 936	355 277	443 659
85 y más años	703 295	298 739	404 556
No especificado	1 397 406	700 219	697 187

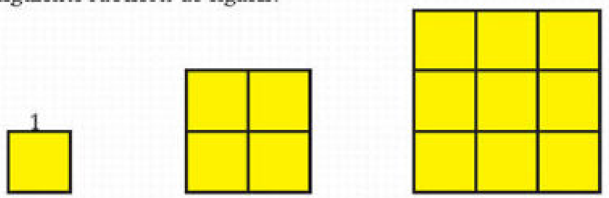
Tabla 4.19

3. Mediante una dinámica a escala grupal, escriban en el pizarrón las respuestas, no sin antes comentar y discutir los procedimientos que siguieron; distingan, con ayuda de su docente, cuáles son los procedimientos más eficaces para llegar a respuestas correctas.

Evaluación

Resuelve los siguientes problemas de manera individual, pero puedes comentar con otros estudiantes los procedimientos que seguirás y revisar las lecciones necesarias antes de responder.

1. Analiza la siguiente sucesión de figuras.



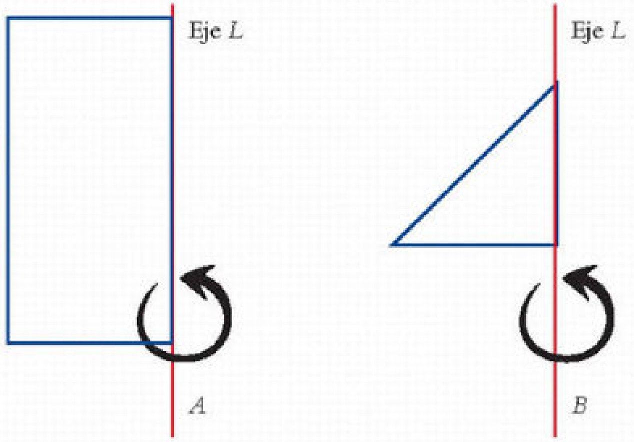
- ¿Cuántos cuadritos tendrá la figura 10?

a) 4 b) 8 c) 16 d) 100

- ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la sucesión?

a) $2n^2$ b) n^2 c) $2n$ d) n^2+1

2. Vamos a construir dos sólidos de revolución, el primero será a partir de un rectángulo y el segundo a partir de un triángulo rectángulo.



- ¿Cuál de los dos sólidos de revolución tienes que hacer girar para formar un cono?

____

- Si el rectángulo inicial tuviera un área menor a la del triángulo, ¿qué sólido tendrá mayor volumen?

a) El sólido formado a partir del rectángulo.
b) El sólido formado a partir del triángulo.
c) Los dos pueden tener el mismo volumen.
d) No podemos saberlo.

- Argumenta tu respuesta. ______________________________

- Cuando estos dos sólidos tienen el mismo radio y la misma altura, ¿en qué proporción cambia el volumen del cono con respecto al cilindro? ________________

- ¿Siempre sucederá lo mismo? ________ Argumenta tu respuesta. ________________

- Supongamos que la base del primero y segundo sólido tiene 2 cm y 10 cm de altura respectivamente, ¿cuál será el volumen de cada uno?

a) 40 cm³ y 10 cm³ c) 125.66 cm³ los dos
b) 125.66 cm³ y 41.89 cm³ d) 41.89 cm³ los dos

3. Cuando intersectamos un cilindro con un plano perpendicular al eje de rotación, el resultado es:

a) Un cuadrado de área menor a la base del cilindro.
b) Un triángulo equilátero de la misma área del cilindro.
c) Un círculo del mismo radio que el cilindro.
d) Una curva muy extraña.

4. Si intersectamos un cilindro con dos planos distintos y que sean perpendiculares al eje de rotación del cono, obtendremos:

a) Dos círculos del mismo radio c) Dos curvas muy extrañas
b) Dos cuadrados del mismo radio d) Dos círculos de radio distinto

5. ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones corresponde(n) a rectas de pendiente $\frac{2}{3}$?

I. $2x + 3y = 3$ II. $3x - 2y - 1 = 0$ III. $4x - 6y + 5 = 0$

a) sólo I b) sólo II c) sólo III d) I y II e) I y III

6. La recta de ecuación $6x - y - 9 = 0$ pasa por el punto A. Si la ordenada del punto A es el triple de su abscisa, ¿cuál es la abscisa de A?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 3

7. La recta de ecuación $2x - 3y = 6$, intersecta al eje Y en el punto de ordenada:

a) –3 b) –2 c) 1 d) 2 e) 3

8. Comparte tus respuestas con otros estudiantes y relata los procedimientos y razonamientos que seguiste para contestar. Bajo la asesoría del docente, validen los resultados ante el grupo.

BLOQUE V

Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

En este quinto y último bloque de tu curso de Matemáticas, tercer grado, resolverás problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones; analizarás las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono; construirás las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos; estimarás y calcularás el volumen de cilindros y conos; analizarás situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la Física, la Biología, la Economía y otras disciplinas; y analizarás las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo. Has llegado al final de tu curso de Matemáticas y también de tu formación secundaria. ¡Felicidades!

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Planeación del Profesor
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	5.1	28	
Forma espacio y medida	Medida	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	5.2	29	
		Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	5.3	30	
		Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	5.4	31	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	5.5	32	
	Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	5.6	33	

Formulación de problemas a partir de una ecuación dada

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tema: Patrones y ecuaciones.

Actividad individual

Conocimientos previos

En cursos anteriores aprendiste a resolver ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones.

- Con base en tus conocimientos, resuelve el siguiente problema:

1. Rodrigo tiene ahorrados \$ 1 000 más que el triple de lo que tiene ahorrado Sandra; y Daniel tiene ahorrado la mitad de lo que tiene Sandra. Se sabe que entre los tres tienen \$ 4 600.

- ¿Cuánto dinero tiene ahorrado cada uno? Escríbelo a continuación.

Rodrigo______________ Sandra______________ Daniel______________

- ¿Cuál sería la ecuación que modela este problema? Escríbela y explícala a continuación.

____

- Compara tus respuestas con las de otros estudiantes y comenta los procedimientos que seguiste para contestar; defiende tu trabajo con argumentos y razonamientos.
- Organicen una dinámica a escala grupal para asentar sus conclusiones en el pizarrón bajo la guía de su docente.

Actividad en parejas

Trabaja con algún compañero para resolver este problema. Una fábrica produce dos tipos diferentes de casas de campaña: una para tres personas y otra para ocho. Estos artículos deben pasar por dos departamentos antes de ser vendidas. Para cortar y unir las casas se requieren 620 h semanales y para empacarlas aproximadamente 380 h a la semana.

La tabla 5.1 muestra las horas por persona que se utilizan en cada departamento para terminar las casas.

Departamento	Tiempo (*h/persona*)		Horas totales semanales
	Casa para tres personas	Casa para ocho personas	
Cortar y unir	3	5	620
Empaque	2	3	380

Tabla 5.1

Respondan en su cuaderno:

- ¿Cuántas variables existen en el problema? Expliquen por qué.
- ¿Cuántas ecuaciones tienen que plantear? Argumenten.
- ¿Cuántas casas de campaña de cada tipo deberán producirse semanalmente para que la fábrica utilice todos sus recursos?
- Expongan sus argumentos ante otros estudiantes y escuchen con atención los suyos; para resolver sus dudas, consulten a su docente.

Pistas

- Lean cuidadosamente el problema.
- Recuerden que las literales representan las incógnitas de la situación dada.
- Determinen cuántas incógnitas tiene el problema.
- Analicen el tipo de ecuación que deben plantear para resolver el problema de acuerdo con el número de incógnitas.
- Escriban y expliquen la o las ecuaciones que ayudarán a resolver el problema.
- Discutan con el grupo y con el profesor la diferencia que existe en la manera de resolver este problema y la que siguieron en la sección Conocimientos previos.

Nuevos Conocimientos

Las ecuaciones son necesarias para resolver problemas de la vida cotidiana a través de expresiones algebraicas que se plantean de acuerdo con el problema que se quiere solucionar.

Recuerda que una ecuación es una igualdad formada por dos miembros en la que existen una o más incógnitas que son letras que representan un valor. Resolver una ecuación es encontrar su solución.

Ya estudiaste diversos procedimientos para resolver ecuaciones dependiendo de si la ecuación es lineal, si es un sistema de ecuaciones o si es una ecuación cuadrática.

En esta lección lo importante es que sepas identificar y plantear qué tipo de ecuación o procedimiento requiere el problema para hallar su solución.

Para poder resolver un problema y determinar el tipo de ecuación a emplear, deberás:

- Entender la lógica del problema.
- Identificar las variables del problema.
- Establecer la relación entre las variables de acuerdo con el contexto.
- Determinar la ecuación que representa la situación contextual.
- Dependiendo de la naturaleza de la ecuación lineal, sistemas de ecuaciones o cuadrática, se elegirá el método que se utilizará para resolverla.
- Analizar las soluciones obtenidas y utilizar las que sean acordes con la situación contextual.

Con ayuda de estos pasos vamos a resolver el problema anterior.

Entender la lógica del problema:

El problema habla sobre la fabricación de dos tipos de casas de campaña y se necesita saber cuántas de cada tipo se produce semanalmente utilizando al máximo los recursos.

Identificar las variables del problema:

x = *número de casas de campaña para tres personas*

y = *número de casas de campaña para ocho personas*

Establecer la relación entre las variables de acuerdo con el contexto:

A más horas de trabajo semanales > producción

Determinar la ecuación que representa la situación contextual:

Ecuación 1: se refiere al departamento donde se cortan y unen las piezas que requiere:

3 horas por persona para cada casa de campaña para tres personas y 5 horas por persona para fabricar la casa para ocho personas. En total se requieren 620 horas semanales.

$$3x + 5y = 620$$

Ecuación 2: se refiere al departamento de empaque:

2 horas por persona para empacar casas de campaña para tres personas y 3 horas por persona para empacar las casas para ocho personas. En total se requieren 380 horas semanales.

$$2x + 3y = 380$$

Dependiendo de la naturaleza de la ecuación lineal, sistemas de ecuaciones o cuadrática, se escogerá el tipo de método que se utilizará para resolverla.

Este problema, al tener dos variables, necesita dos ecuaciones, por lo tanto hay que emplear un sistema de ecuaciones:

Ecuación 1 $\quad 3x + 5y = 620$

Ecuación 2 $\quad 2x + 3y = 380$

Analiza las soluciones obtenidas y utiliza las que estén de acuerdo con la situación.

Actividad en equipo

En equipos respondan en su cuaderno:

- ¿Qué método utilizarían para resolver este sistema de ecuaciones?
- ¿Por qué?
- ¿Cuántas casas de campaña de cada tipo deberán producirse semanalmente para que la fábrica utilice todos sus recursos? ¿Es el resultado que obtuvieron en un principio?
- En caso contrario, ¿qué es lo que tendrían que mejorar?
- Comparen el método elegido y sus resultados con sus compañeros y docente.

Actividad grupal

Como actividad grupal, resuelvan en el pizarrón el siguiente problema. Paola tiene 5 años más que Andrea y el cuadrado de la edad de Paola sumada a la edad al cuadrado de Andrea es igual a 233.

- ¿Cuál es la edad de cada una?
- ¿Qué tipo de ecuación utilizarían para resolver el problema?
- ¿Cuál es la variable?
- ¿Qué expresión matemática es la que define el problema?
- ¿Las soluciones que encontraron tienen sentido?
- Argumenten su respuesta.
- Con el apoyo de su profesor, argumenten por qué utilizaron este tipo de ecuación para resolver el problema.

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve los siguientes problemas, primero de manera individual; al terminar, reúnete con otro estudiante para revisar tu trabajo y exponer tus argumentos.

1. Una vela mide 30 cm. Al prenderla cada hora va disminuyendo 1.5 cm.
a) Construye una tabla de valores.
b) Identifica la variable dependiente y la independiente.
c) ¿Cuánto mide la vela después de 14 horas?
d) ¿Cuánto tiempo tarda en apagarse la vela?
e) ¿Qué tipo de ecuación representa el problema?
f) Determina la ecuación que modela el problema.

2. Con ayuda de una taza de medir y a partir de la altura de la harina en la taza podemos saber su peso en gramos (Fig. 5.1).

Fig. 5.1 A partir de la altura de la harina en la taza podemos determinar su peso.

- Observa la tabla 5.2 y complétala:

Altura (cm)	2	4	6	8	10	12	14
Peso (*gr*)	6	36	90	168			

Tabla 5.2

- Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál de las siguientes funciones es la que representa el problema?
$Y = 2x + 6$ $\quad Y = 3x^2 - 3x$ $\quad Y = x^3$
Justifica tu respuesta y compárala con las de tus compañeros.

b) ¿Cómo tendría que ser la taza de medir para que la altura de la harina en relación con el peso representaran una función lineal?

3. Daniela tiene en su alcancía 10 monedas más de \$ 10 que de \$ 5. Contó las monedas y en total tenía \$ 400. ¿Cuántas monedas de cada denominación tiene?

4. La suma del triple de un número más el doble de otro es igual a 175 y la diferencia del cuádruple del primer número menos el triple del segundo es igual a 120. ¿Cuáles son esos números?

5. Elda repartirá a sus tres hijos \$ 6 400. A Adriana le toca la mitad que a Bruno y a Carlos \$ 400 más que a Adriana. ¿Cuánto le toca a cada uno?

6. José tiene un taller de carpintería y compra 6 kg de clavos y 3 kg de tornillos por \$ 120. Al día siguiente compra 4 kg de clavos más 8 kg de tornillos por \$ 140. ¿Cuánto cuesta el kilogramo de clavos y cuánto el de tornillos?

7. Una caja mide 8 cm de altura y su ancho mide 8 cm más que de largo. Si el volumen es 3 072 cm^3, ¿cuánto mide de longitud y ancho?

8. La suma de los cuadrados de tres números consecutivos es igual a 50. ¿Cuáles son esos números?

9. En parejas inventen y resuelvan un problema con cada una de las siguientes ecuaciones. Planteen cada problema en una hoja diferente e intercámbienlos con sus compañeros para que también los resuelvan.

a) $2x + 3y = 4$
$4x - 2y = 24$

b) $5x - 3 = 2x + 6$

c) $x(x + 10) = 144$

d) Pablo $= x$
Santiago $= 2x$
Jorge $= 3(2x)$
Total 1 800

e) $y = 3x + 2$

f) $m^2 + 6m = 27$

10. Bajo la guía de su docente, organicen una dinámica a escala grupal para revisar los procedimientos seguidos en cada ejercicio, esclarecer las dudas y arribar a conclusiones comunes.

Cortes a cilindros y conos rectos

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Medida.

Actividad individual

Conocimientos previos

Simetrías, rotaciones y traslaciones. Cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares. Conceptos y criterios de congruencia y semejanza de triángulos, y nociones fundamentales de sólidos de revolución.

¡Deducir para medir!

¿Recuerdas que a partir de desarrollos planos, al doblar y pegar, pudiste obtener sólidos de revolución como los que habías estudiado anteriormente? ¿Te gustaría hacer un cono más alto o un cilindro de radio más grande? Si quieres que la altura del cono mida h (centímetros, pulgadas, palmos) y que el radio de su base sea r (ver figura 5.2):

- ¿Cuánto deben medir el círculo mayor, el sector angular y el pequeño círculo tangente, para que al doblar y pegar obtengas un cono de las medidas requeridas? (Ver figura 5.3).

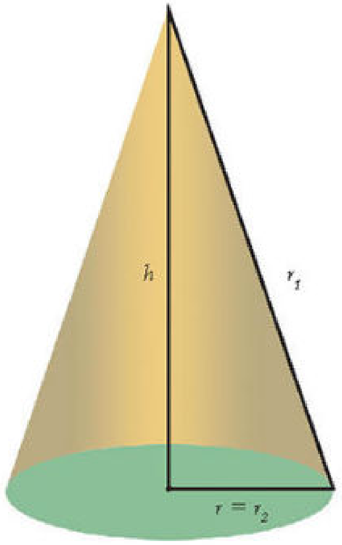


Fig. 5.2 Cono.

Observa el triángulo rectángulo al «interior» del cono. Toma como referencia el ángulo agudo formado por la hipotenusa y el eje, sus medidas son: cateto adyacente h, cateto opuesto r e hipotenusa r_1.

Si de inicio sólo sabes que el cono debe tener una altura y radio determinado, puedes deducir el valor de la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras, de modo que:

$$r_1 = \sqrt{h^2 + r^2}$$

Para determinar la longitud del arco del sector angular, observa que ésta es justamente el perímetro de la circunferencia de radio r: la base del cono. Llamamos a esta longitud $\overline{L_a}$, así pues:

$$\overline{L_a} = 2 \cdot \mu \cdot r$$

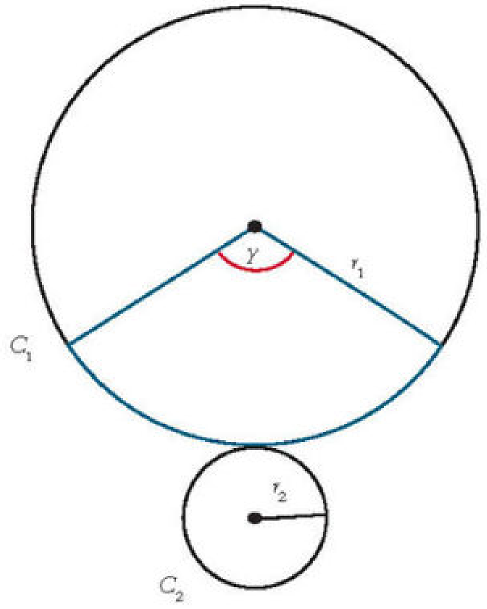


Fig. 5.3 Reproduce los trazos en tu cuaderno.

El problema ahora, será determinar un arco $\overline{L_a}$ de la circunferencia C_1, que mida exactamente $\overline{L_a}$. Ten presente que el radio de C_1 es r_1.

Medir sobre una recta es tan obvio como natural, pero en una circunferencia las cosas cambian un poco.

Recuerda que al dividir la circunferencia en 360°, cada grado representa una fracción de la circunferencia.

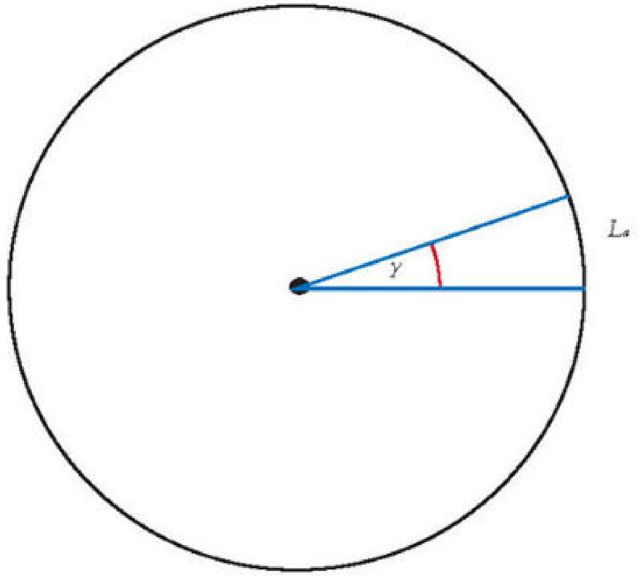


Fig. 5.4 Cada grado representa una fracción de la circunferencia.

Mediante una regla de tres se puede determinar la relación entre un ángulo a y $\overline{L_a}$ de la figura 5.4:

$$360° \rightarrow 2\cdot\pi\cdot r_1$$

$$\alpha \rightarrow \overline{L_a}$$

De donde se deriva que:

$$\overline{L_a} = \frac{2\cdot\pi\cdot r_1\cdot\gamma}{360}$$

Ahora el problema está casi resuelto. Si se despeja de la igualdad anterior, se tiene:

$$\gamma = \frac{\overline{L_a}\cdot 360}{2\cdot\pi\cdot r_1}$$

Un dato interesante: la igualdad anterior puede simplificarse si se sustituye $\overline{L_a}$ por $(2\cdot\pi\cdot r)$, da como resultado:

$$\gamma = \frac{(2\cdot\pi\cdot r)\cdot 360}{2\cdot\pi\cdot r_1} = \frac{r_1\cdot 360}{r_1}$$

Finalmente, el radio r_2 que necesitas para la pequeña circunferencia C_2 (tangente a C_1), es el mismo que el radio de la base del cono, por lo que:

$$r_2 = r$$

Actividad en parejas

Organicen parejas de trabajo y resuelvan el siguiente problema. Consideren un cilindro de altura h y radio r. Con base en el siguiente diagrama del desarrollo plano del cilindro (Fig. 5.5).

- Determinen las longitudes de $\overline{L_a}$ y $\overline{L_b}$, para el desarrollo plano del cilindro dado.
- ¿Será necesario calcular el radio de las circunferencias tangentes o es un dato que ya conocemos?

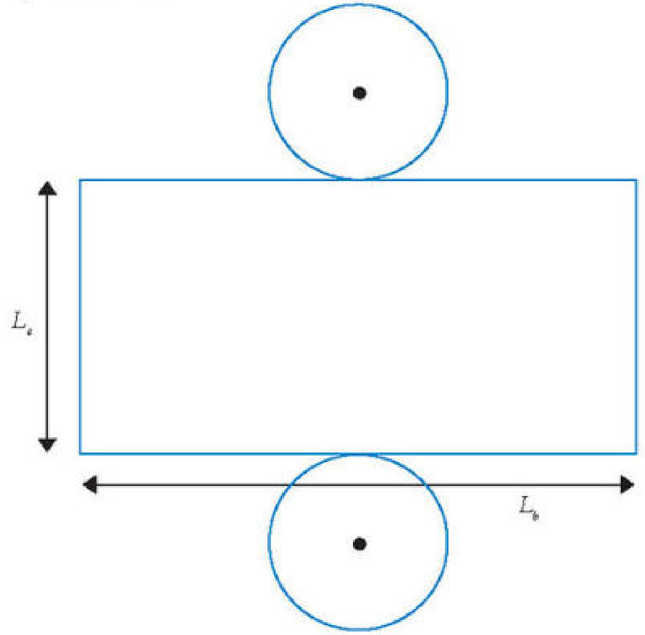


Fig. 5.5 Observa el desarrollo plano de un cilindro.

- ¿Recuerdan cuando intersectaron al cilindro con un plano? (Ver figura 5.6).

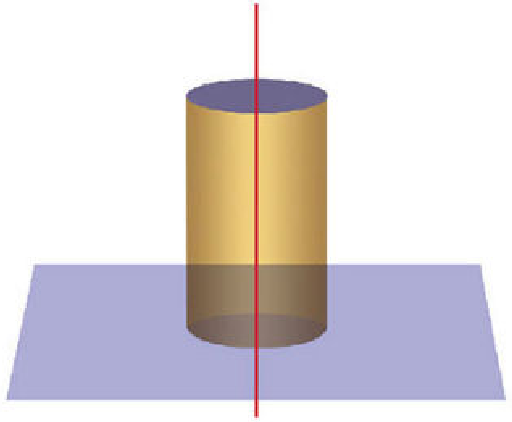


Fig. 5.6 Cilindro intersectado por un plano.

Las secciones resultantes dependen centralmente del ángulo de inclinación del plano con respecto al eje de rotación: circunferencias si el plano es perpendicular al eje y otro tipo de curvas cuando no.

- ¿Qué curvas resultan si el plano de intersección es paralelo al eje?

Pensando en la dinámica de rotación que genera al cilindro, sea p un punto en la intersección del plano perpendicular al eje y el cilindro. Si rotan a p en torno al eje, por definición las sucesivas imágenes de dicha rotación serán también puntos del cilindro (de otro modo p no sería un punto del sólido, o bien, el eje no sería tal).

- ¿Qué figura describe en el espacio la sucesión de puntos imágenes de p bajo la rotación?
- ¿Puedes deducirlo por las propiedades de la rotación?

a) Estarán a una misma distancia del eje.
b) Pertenecen a un mismo plano (de otro modo estaremos rotando en función de más de un eje de rotación).

Y el conjunto de puntos que satisfacen estas dos propiedades son, por definición, una circunferencia.

- ¿Cuál será el radio de dicha circunferencia?
- ¿La distancia de p al eje de rotación? Argumenten su respuesta.

Por esta razón, si intersectan al cilindro con cualquier otro plano perpendicular al eje (siempre que la intersección no sea vacía), el radio de la circunferencia será constante e igual al radio del cilindro.

- Organicen una dinámica grupal bajo la asesoría de su docente para responder las preguntas en el pizarrón y describir los procedimientos seguidos.

Fórmulas de prismas y pirámides

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Medida.

Actividad individual

Conocimientos previos

Revisa tus libros de texto de Matemáticas de cursos anteriores, para retomar la construcción de prismas regulares, paralelogramos y diversos tipos de pirámides. Comparte la información recabada con otros estudiantes; traten de establecer una relación con la construcción de cilindros y conos y, si tienes dudas, consulta a tu docente. Presenta tu trabajo ante el grupo.

Sabías que...

Una de las aplicaciones más usuales que tienen las matemáticas es el estudio del volumen de prismas, cilindros y conos. A través de su historia, el ser humano ha dejado huella sobre el interés en estos cuerpos geométricos y cómo se relacionan entre sí para sacar provecho de ellos, una muestra son las pirámides de Teotihuacán o los bloques con los que se construían grandes monumentos. En nuestros días muchos productos que consumimos se encuentran envasados en prismas regulares o pirámides, por eso es indispensable conocer más de estas figuras y su relación con los cilindros y conos.

Un prisma regular es un cuerpo con base y tapa con las mismas dimensiones, de modo que el área y el perímetro de la base y tapa son iguales, sus caras son paralelogramos, todas de la misma altura. Existen también diversos tipos de pirámides. El nombre se asocia a la figura que tiene su base, ya que sus caras forman triángulos con vértice superior ubicado en el mismo lugar (Fig. 5.7).

- Observa con atención los siguientes desarrollos:

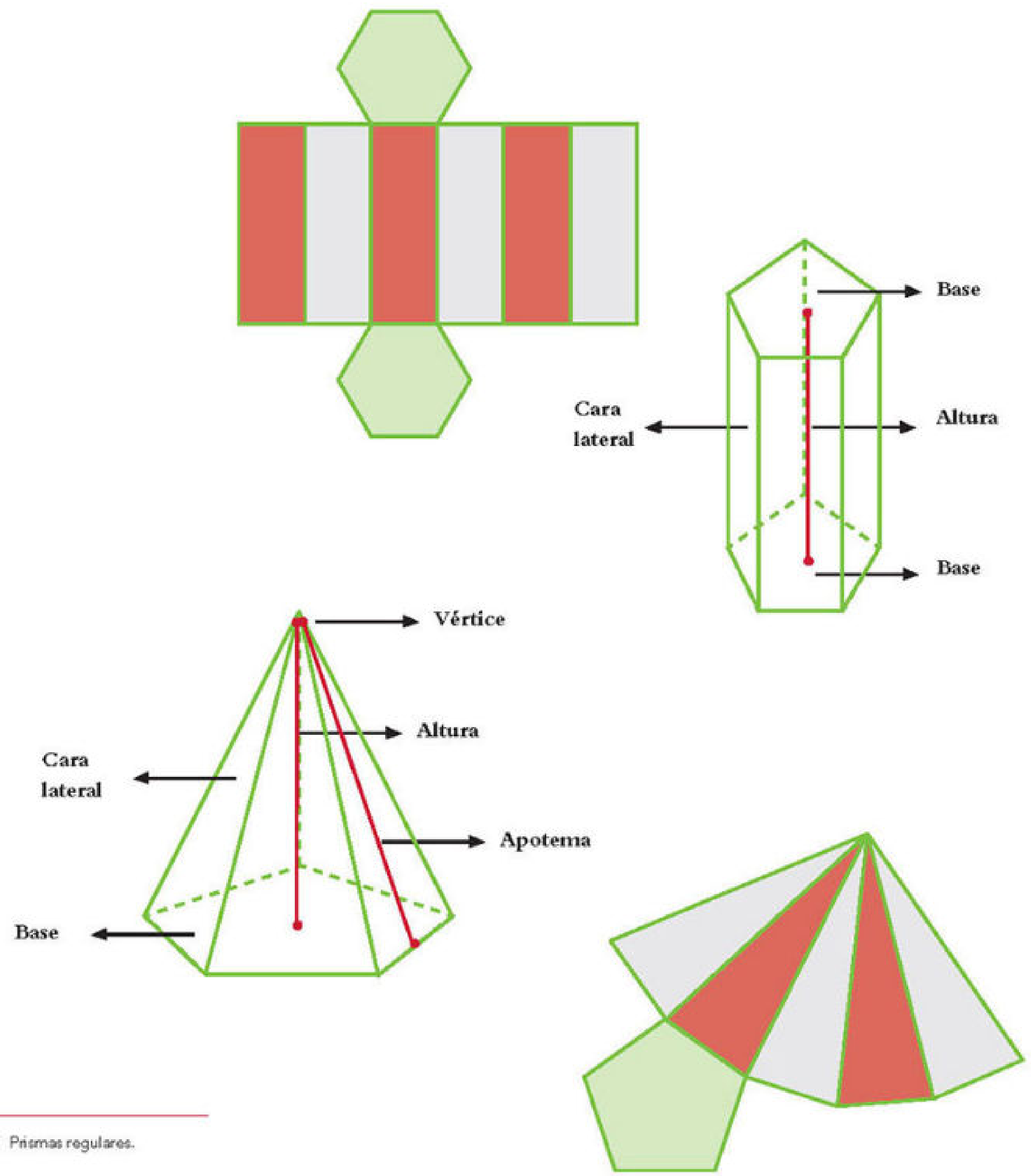


Fig. 5.7 Prismas regulares.

Actividad en parejas

En parejas completen la tabla 5.3 de modo que puedan recordar cómo calcular cada área y perímetro de las figuras regulares que se señalan siguiendo el ejemplo. Al terminar, contrasten su trabajo con el de otros estudiantes, intercambien argumentos para justificar sus respuestas y pidan asesoría a su docente para esclarecer dudas.

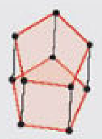
Nombre	Nº lados	Área	Perímetro	Dibujo	Prisma
Triángulo			$P = L + L + L$		
Cuadrado		L^2			
Paralelogramo	4				
Trapecio					
Pentágono					
Hexágono					
Heptágono					
Octágono					

Tabla 5.3

Recordarás que cuando se busca el volumen de un prisma regular basta con aplicar la siguiente regla:

Volumen de un prisma regular = (área de la base) (altura del prisma)

Esta regla es válida para todos los prismas regulares, lo que varía entre ellos es la base que conforma el prisma.

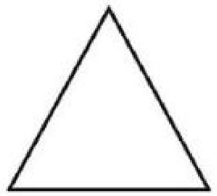


Fig. 5.8 Base y tapa de un triángulo.

Observa lo siguiente:

Si la base y la tapa son triángulos (Fig. 5.8), entonces:

$$\text{al área de la base} = \frac{(\text{base})\ (\text{altura})}{2}$$

Por lo tanto, el volumen de un prisma con base triangular es:

$$V = \frac{(\text{base})\ (\text{altura})}{2}\ (\text{altura del prisma})$$

- Con ayuda de la tabla que completaste obtén el área de cada prisma regular.

Actividad individual

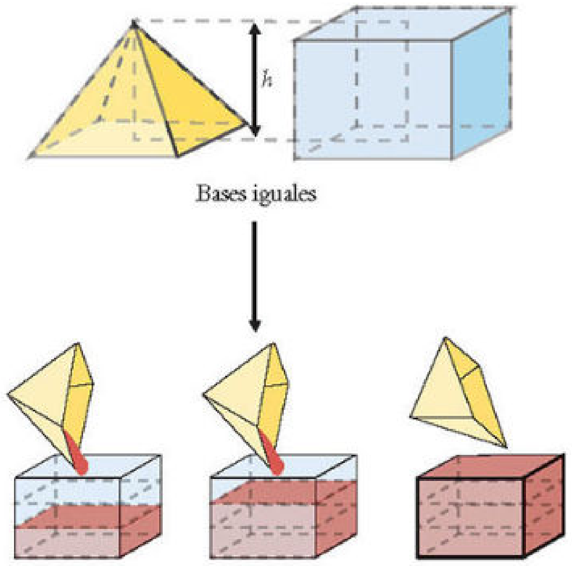


Fig. 5.9 El volumen de tres pirámides con la misma base y altura que un prisma regular, representa el volumen del prisma.

Así como encontraste una regla para no olvidar las fórmulas de obtener el volumen de prismas regulares, también es posible encontrar una regla para las pirámides conformadas por las figuras que hemos estado trabajando, porque hay una relación con el prisma regular y la pirámide de misma base y altura del prisma regular. Si calculas el volumen del prisma regular y ese volumen lo divides entre tres, el resultado es justamente el volumen de la pirámide con esa base y misma altura que el prisma regular; en otras palabras, el volumen de tres pirámides con la misma base y altura que un prisma regular, representa el volumen del prisma (Fig. 5.9).

- En tu cuaderno calcula el volumen de los prismas que dibujaste en la actividad anterior, obtén la información con ayuda de una regla para encontrar los datos necesarios.
- Comparte tus cálculos con otros estudiantes y describe el procedimiento seguido.
- Con el apoyo de tu docente, establece conclusiones.

Actividad en parejas

En esta actividad necesitarás trabajar en parejas y poner mucho ingenio para corroborar sus resultados, ya que es posible probar esta propiedad de una manera divertida. Al terminar, compartan su trabajo con el grupo y con su docente.

- Diseñen un modelo donde involucren de manera artística un prisma regular y tres pirámides de misma altura y base; rellenen el prisma con algún material que ocupe su volumen lo mejor posible (confeti, alpiste, arena, arroz, etcétera).
- Pongan una ventana con cinta adherente transparente para que puedan ver en el interior de su figura; unan las tres pirámides con su prisma de modo que puedan dejar un espacio entre ellas para que el material que pusieron en el interior de su prisma regular pueda pasar a ocupar el volumen de sus tres pirámides, como una especie de reloj de arena de la antigüedad, así podrán verificar sus resultados.
- No olviden utilizar material reciclado, ahí entra su ingenio.
- Elijan la figura que quieran como base, verán que es muy interesante y divertido jugar con las matemáticas (Fig. 5.10).

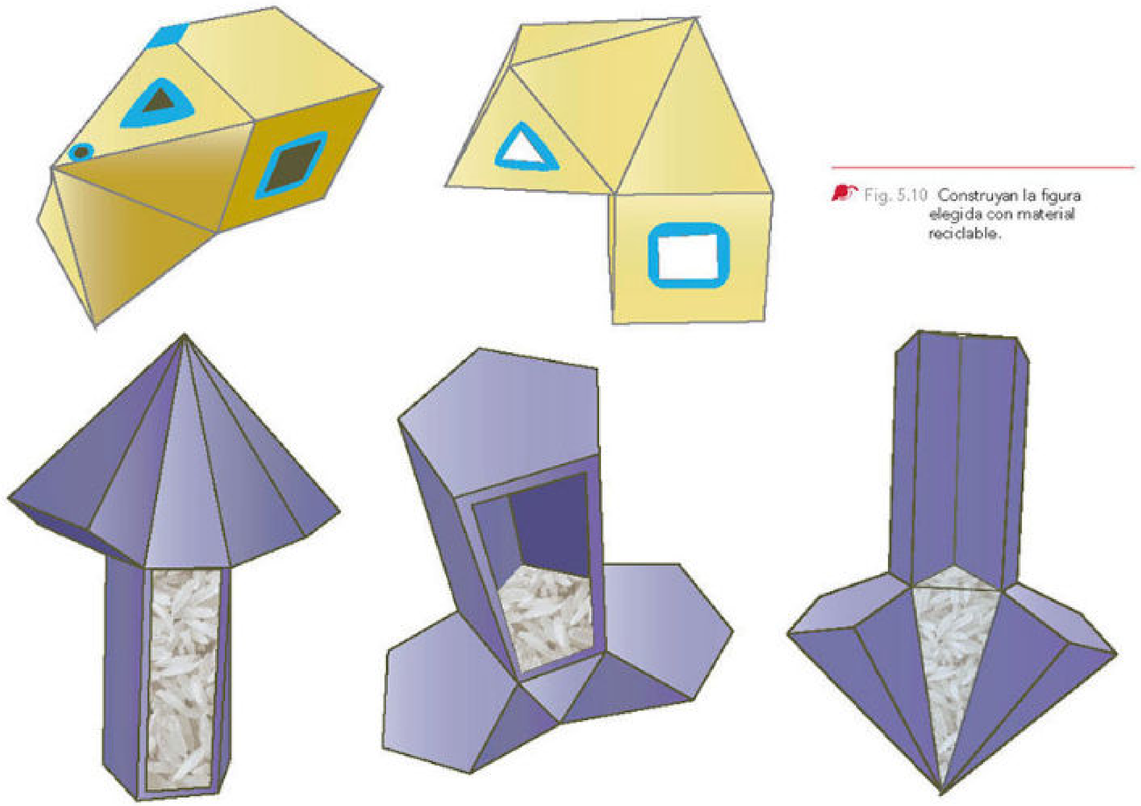


Fig. 5.10 Construyan la figura elegida con material reciclable.

▸ ¿Sabías que esta propiedad también se guarda para el círculo? (Fig. 5.11)

Fig. 5.11 Dispositivo experimental.

Actividad individual

Completa en los espacios previstos los datos que se piden relacionados al círculo.

El perímetro del círculo se calcula como $P =$ ____________ , de este modo obtenemos su perímetro al conocer su ____________ y multiplicarlo por $\pi = 3.1416$ (valor redondeado porque es un número con expansión decimal infinita) el área del círculo es igual a $A =$ ____________. Si construimos un prisma con base y tapa circular se conoce con el nombre de ____________ , del cual, al cumplir con las mismas propiedades de los prismas regulares, podemos obtener su volumen sabiendo su base es $A = (\pi)\ (r^2)$, y si denotamos a la altura del cilindro como h, el volumen sería igual a $V =$ ____________; si quisiéramos obtener la pirámide con base circular, el cual conocemos con el nombre de ____________ , el volumen quedaría como $V =$ ____________.

- Discute con tu profesor tus respuestas y realiza un resumen en tu cuaderno con las fórmulas y sus respectivos dibujos.
- Comparte tu trabajo con el resto del grupo.

Lección 5.4

Volumen de cilindros y conos

Eje: Forma, espacio y medida.

Tema: Medida.

Actividad individual

Conocimientos previos

En cursos anteriores de Matemáticas aprendiste que el volumen de un cuerpo está relacionado con el espacio físico que éste ocupa.

- Si no recuerdas con claridad, revisa tus libros de texto de primer y segundo grados en compañía de algún compañero.

A través de la historia se han determinado diferentes formas y fórmulas para calcular el volumen de las figuras. Dichas fórmulas pueden ser delimitadas como ecuaciones si se quiere obtener el valor de cada una de las variables que están implícitas. De manera individual, resuelve el siguiente problema:

En un depósito de dulces venden gorros para fiestas infantiles en forma de cono. La mamá de Diego quiere rellenarlos de harina para un concurso que va a organizar. Las medidas de los gorros son las siguientes: diámetro 10 cm y altura 16 cm. Responde en tu cuaderno.

- ¿Qué volumen ocupará la harina que está adentro del gorro?
- ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen del cono?
- Comparte tus respuestas con los estudiantes de tu grupo y con tu docente.

Actividad en parejas

Recuerda

- $1\ dm^3 = 1$ litro $= 1$ kg de agua
- $1\ cm^3 = 1$ ml $=1$ gr

Formen parejas de trabajo y resuelvan este problema. Una jarra en forma cilíndrica tiene 10 cm de diámetro y mide 16 cm de altura. Iván y sus amigos acaban de jugar futbol y servirán agua en vasos en forma de cono, cuyo volumen es de 118 cm^3 y el diámetro de 5.3 cm. Responde lo siguiente:

- ¿Qué volumen tiene la jarra? ¿Cómo lo saben?
- ¿Cuánta agua le cabe a la jarra?
- ¿Cuántos vasos se pueden llenar?
- ¿Cómo podrían obtener la altura del cono conociendo el diámetro y volumen de éste?
- ¿Cuánto tendría que medir la altura del cono para que tuviera un volumen igual que la jarra?
- Contrasten sus respuestas con las de otros estudiantes, describan los procedimientos que siguieron y, bajo la guía de su docente, escriban su conclusiones.

Actividad en equipo

Organizados en equipos de trabajo, realicen lo que se pide a continuación:

- ¿Cuáles son las fórmulas para calcular el volumen del cilindro y del cono?
- En una cartulina tracen un cono que mida 16 cm de altura y 5 cm como radio de la circunferencia; también tracen un cilindro que mida de altura 16 cm y su base sea de 5 cm de radio. Pongan mucha atención ya que ambos cuerpos geométricos tienen la misma altura y el mismo radio.
- Utilícenlos para estimar los resultados y comprobar la relación que existe entre los volúmenes de los dos cuerpos geométricos; llénenlos con arroz o frijol.
- Comparen sus resultados con sus compañeros y comprueben que sus dimensiones sean equivalentes.
- Si tienen alguna duda, consulten a su docente.

En lecciones anteriores aprendieron a calcular el volumen del cilindro y del cono. En el problema de Iván tuvieron que despejar la altura de la fórmula del cono, calcularla y así saber cuánto debe medir la altura de éste para tener el mismo volumen que la jarra.

Para calcular cualquiera de las variables de la fórmula, sustituyan en ella los valores que conocen y despejen la variable que desean obtener.

- Sigan trabajando en equipo para completar la tabla 5.4, despejando de las siguientes fórmulas las variables que se indican.

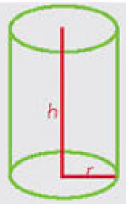
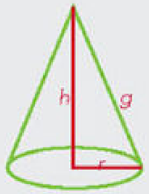
Cuerpo	Figura	Volumen	Despeja	Despeja
Cilindro		$V = \pi r^2 h$	$h=$	$r=$
Cono		$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$	$h=$	$r=$

Tabla 5.4

- Con base en el despeje de las fórmulas, comprueben o corrijan las estimaciones que realizaron en el problema de Iván y sus amigos.

Aunque en esta actividad no pudieron comprobar con agua la relación que existe entre la capacidad que tienen el cono y el cilindro, lo hicieron con arroz y frijol.

- Expliquen en su cuaderno la relación que existe entre unidades de volumen, capacidad y peso.
- Compartan con el resto del grupo sus respuestas y reflexiones; soliciten asesoría de su docente para esclarecer las dudas.

Fig. 5.12 Perfumes en diversas presentaciones.

Actividad grupal

Mediante una dinámica grupal instruida por su docente, resuelvan este problema. Una perfumería vende fragancias en las siguientes presentaciones (Fig. 5.12):

$r = 2$ cm

- Completen la tabla 5.5 y respondan en el pizarrón las preguntas.

Altura (cm)	Volumen (cm^3)
4	50.27
8	
	150.8
16	
	251.33

Tabla 5.5

- Si el radio es constante, ¿cómo varía la altura y el volumen?
- Grafiquen en sus cuadernos la tabla y expliquen qué relación existe entre las variables.

En la perfumería también venden fragancias en recipientes con forma de cono en cinco presentaciones (Fig. 5.13).

- Completa la tabla 5.6 y responde en tu cuaderno las preguntas:

Fig. 5.13 Perfume en recipiente con forma de cono.

Altura (cm)	Volumen cm^3
4	16.76
8	
	50.27
16	
	83.78

Tabla 5.6

- ¿Qué relación existe entre la altura y el volumen cuando el radio es constante?
- Dibujen una gráfica con los valores de la tabla.
- ¿Qué diferencia existe entre la gráfica de las fragancias y la de los perfumes?
- Argumenten sus respuestas y compárenlas con las de otros compañeros.
- Con el apoyo de su docente, describan en el pizarrón el procedimiento correcto para resolver este tipo de problemas.

Ejercicios y aplicaciones

Resuelve de manera individual los siguientes problemas; cuando termines, contrasta tus respuestas con las de otros estudiantes y discutan las diferencias, rectifiquen si es necesario y consulten libremente la lección estudiada.

1. Hugo invitó a su familia a acampar y en el lugar al que van a visitar rentan tiendas de campaña en forma de cono mejor conocidas como tipis (Fig. 5.14). Al llegar al lugar le dieron una lista con las dimensiones de los tipis. Algunos números estaban borrados. Ayuda a Hugo a encontrar las dimensiones que faltan en la tabla 5.7.

Volumen (m^3)	Diámetro (m)	Altura (m)
2.09	2	
	3	2
25.13	4	
39.27		2

Tabla 5.7

Fig. 5.14 Tipi con forma de cono.

Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Qué variable es la que permanece constante?
- ¿Cómo varía el radio y el volumen del cono cuando la altura permanece constante?
- Grafica en tu cuaderno los valores de la tabla anterior.
- ¿Qué diferencia existe cuando el radio permanece constante y la altura y el volumen varían?

2. Una lata de refresco mide 12 cm de altura y su volumen es de 235 cm^3.

Diana, quien maneja su coche, coloca la lata de refresco en el portavasos en forma cilíndrica cuyo diámetro mide 4 cm, al igual que la altura.

Fig. 5.15 Lata de refresco.

Responde las siguientes preguntas:

- ¿La lata (Fig. 5.15) entrará en el portavasos (Fig. 5.16)? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el diámetro del portavasos y el de la lata de refrescos?

3. Un contenedor en forma cilíndrica tiene 150.8 m^3 de agua. Se quiere depositar en una alberca que tiene 75 m^2 de área y una altura de 1.20 m.

- ¿Cuántos contenedores se necesitarán para llenar la alberca?
- ¿Qué capacidad tiene la alberca?

4. Luisa compró un florero en forma de cilindro que dentro tiene un cono.

El cilindro tiene un volumen de 1 178.10 cm^3 y un radio de 5 cm.
El cono tiene un volumen de 392.70 cm^3 y una altura de 15 cm.

Fig. 5.16 Portavasos.

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál de las dos figuras geométricas tiene mayor altura?
- Justifica tu respuesta.
- ¿Cuánta agua le cabe al cilindro sin el cono adentro?
- Si introducimos el cono al cilindro, ¿qué parte de agua desplazaría el cono? ¿Por qué?
- ¿Qué relación existe entre los dos volúmenes?

5. Mediante una dinámica a escala grupal, escriban en el pizarrón las respuestas, no sin antes comentar y discutir los procedimientos que siguieron; distingan, con ayuda de su docente, cuáles son los procedimientos más eficaces para llegar a respuestas correctas.

Lección 5.5

Situaciones problemáticas asociadas a varias disciplinas

Eje: Manejo de la información.

Tema: Proporcionalidad y funciones.

Actividad individual

Conocimientos previos

Jaime lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 12 m/s y una aceleración de 16 m/s^2. En forma individual, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Qué operaciones hay que hacer a la magnitud tiempo para obtener la correspondiente altura?
- ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la piedra?
- ¿Qué tipo de variación modela este problema?
- ¿Cuál sería la expresión algebraica que utilizarías para representar la altura en función del tiempo?
- Comparte tus respuestas con otros estudiantes y con tu docente, explica tus procedimientos.

Actividad en parejas

Trabajen en parejas para resolver el siguiente problema. Una mujer de 53 años de edad es remitida al servicio de urgencias por su médico de cabecera ya que presentó síntomas de hiperglucemia (nivel elevado de glucosa en sangre). Al llegar a emergencias, presentaba 300 mg/dl de glucosa en la sangre, por lo que hubo que suministrarle 8 UI de insulina.

El doctor sabe que para nivelarle la glucosa, cada 2 UI de insulina disminuyen 50 mg/dl la glucosa en la sangre.

El valor normal de glucosa en la sangre es de 100 a 125 mg/dl en ayuno, pero el doctor pretende dejarle la glucosa en 100 mg/dl.

Respondan en su cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Qué representa la variable independiente x?
- ¿Qué representa la variable dependiente y?
- ¿Qué tipo de función representa el problema?
- Escriban algebraicamente la relación que existe entre la variable dependiente y la independiente.

Pistas

Desarrollen lo que se pide a continuación:

- Construyan una tabla con valores para 400 mg/dl, 350 mg/dl, 300 mg/dl, 250 mg/dl, 200 mg/dl, 150 mg/dl y 100 mg/dl, sabiendo que cada 2 UI de insulina disminuyen en 50 mg/dl la glucosa en la sangre.
- Tracen una gráfica.
- Analicen junto con otros compañeros las características de la gráfica.

Nuevos Conocimientos

Diariamente nos enfrentamos a situaciones que involucran conjuntos de variables entre las cuales existe una relación de fenómenos que, para explicar y analizar, debemos utilizar diferentes funciones como la lineal y la cuadrática.

Descartes, filósofo francés (1596-1650), decía que cuando una ecuación tiene dos incógnitas, existe un lugar correspondiente y el punto extremo de cualquiera de esas dos variables es el que describe si se trata de una línea recta o curva.

La función de la recta es, dentro de las demás funciones, la más sencilla y juega un papel muy importante en la resolución de problemas tanto en biología, como en física, economía, ingeniería y algunas disciplinas más.

Recuerda que la función lineal tiene la forma $y = mx + b$, en la que existe una constante de proporcionalidad, lo que significa que al existir un cambio unitario en la variable independiente causa otro cambio de unidad en la variable dependiente.

Como ya estudiaste en el bloque anterior, la razón de cambio está dada por la pendiente de la función. Recuerda que cuanto mayor es la pendiente más se aleja del eje de las abscisas.

Además, las funciones cuadráticas se escriben de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y si la representas gráficamente siempre se obtiene una curva.

Para modelar diferentes fenómenos se utilizan funciones lineales o cuadráticas y para que sea posible medir la relación que existe entre las variables de dichas funciones se deben tener y ordenar, en una tabla, los datos que muestran los valores correspondientes de las variables que están involucradas, como la tabla que construiste en la actividad de la señora que presentaba hiperglucemia.

La representación gráfica de dichas funciones es muy valiosa, ayuda a visualizar mejor el comportamiento de cualquier fenómeno e identificar la expresión algebraica que modela a cada uno de éstos.

A partir de la expresión algebraica puedes determinar dos valores (x, y) que si al ubicarlos en tu plano cartesiano coinciden con cualquier punto de tu recta o parábola, quiere decir que corresponden a dicha expresión.

Como hemos mencionado, la gráfica de una función cuadrática es una curva en la cual pueden representarse varios fenómenos de distintas disciplinas como en física, la altura (h) que alcanza un objeto transcurridos (t) segundos al ser lanzado verticalmente; en biología, los efectos nutricionales de los organismos; en economía, utilidad, costo-ingreso, oferta-demanda, optimización de ventas, etcétera.

Actividad en equipo

Formen equipos y observen la figura 5.17; respondan en su cuaderno:

- ¿Qué representa cada una de las variables?
- Si la cantidad demandada es 9, ¿cuál será el precio?
- Por cada 3 unidades que aumenta el precio, ¿qué sucede con la demanda?
- ¿Cómo es la variación lineal entre precio de harina y cantidad demandada?

- Los puntos (9, 12), ¿corresponden a la expresión algebraica del problema? Justifiquen su respuesta.
- Construyan una tabla de valores para la gráfica anterior.
- ¿Qué expresión algebraica representa este problema?

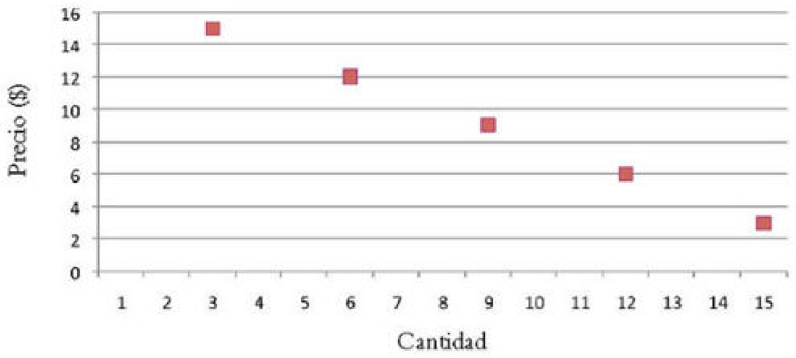


Fig. 5.17 Demanda de harina.

- Comparen sus respuestas con las de otros equipos; expongan los procedimientos y razonamientos seguidos para contestar.
- Con el apoyo de su docente, establezcan conclusiones comunes.

Las funciones lineales pueden ser crecientes o decrecientes de acuerdo al fenómeno que se trate. En una función decreciente el valor de y (variable dependiente) disminuye cuando x (variable independiente) aumenta, como el caso que representa la gráfica de la demanda de harina.

Ejercicios y aplicaciones

Practica lo que aprendiste y resuelve los siguientes ejercicios, primero de manera individual; al terminar, reúnete con otro estudiante y juntos repasen los procedimientos y razonamientos seguidos en cada caso.

1. Para neutralizar 36 g de ácido clorhídrico se necesitan 40 g de hidróxido de sodio. ¿Cuánto ácido clorhídrico se necesita para neutralizar 40 g, 72 g, 100 g y 144 g? Responde en tu cuaderno y elabora lo que se te pide:

- Identifica la variable independiente.
- ¿Qué relación existe entre las dos variables?
- ¿Cómo es la gráfica?
- ¿Qué expresión algebraica modela el problema?
- Por cada unidad de ácido clorhídrico, ¿cuántos gramos de hidróxido de sodio se necesitan?

2. Luis tiene en su granja borregos machos y hembras que se reproducen en función del tiempo de acuerdo con la fórmula $y = -t^2 + 11t + 12$, en donde y son borregos y t es el tiempo transcurrido en años.
Responde las siguientes preguntas.

- ¿Cuántos borregos hay en 8 años?
- ¿En qué tiempo se tiene la mayor población de borregos?
- ¿Cuántos borregos habrá en 12 años? Justifica tu respuesta.

3. Cuando un caballo de carreras necesita tener mayor resistencia, se requiere aportarle mayor cantidad de energía que se le suministra con aceite de maíz.

Al cambiar el porcentaje (P) de energía que aporta el aceite de maíz en el alimento, se calculó el aumento promedio de energía en *Kcal*.

La ecuación que representa la situación anterior es $F(p) = -0.5\,p^2 + p + 10$, en donde $0 < P < 100$.

- Completa la tabla 5.8:

Aceite de maíz (%)	−4		0		4	6
Energía (*kcal*)	−2	6		10		

Tabla 5.8

- ¿Qué tipo de gráfica representa esta situación?

Elabora una gráfica que represente la relación entre el porcentaje de energía que aporta el aceite de maíz (x) y (y) el aumento de energía (*kcal*) en los caballos. Responde lo que se pide:

- ¿Con qué porcentaje de aumento en el aceite de maíz logran los caballos mayor resistencia?
- ¿Qué sucede si se les aumenta un 8% de energía que aporta el aceite de maíz?
- ¿Cuál sería la expresión algebraica que representa esta situación?

4. Un beisbolista batea una pelota cuya trayectoria es una parábola determinada por la ecuación: $h = -t^2 + 2t + 15$.

- ¿Cuáles son las variables que se relacionan?

- ¿Qué tipo de relación es?
- ¿En cuánto tiempo alcanza la altura máxima?
- ¿Qué altura alcanza a los 4 segundos?

5. Relaciona cada función con su gráfica (Fig. 5.18), utilizando la tabla 5.9 que se presenta a continuación:

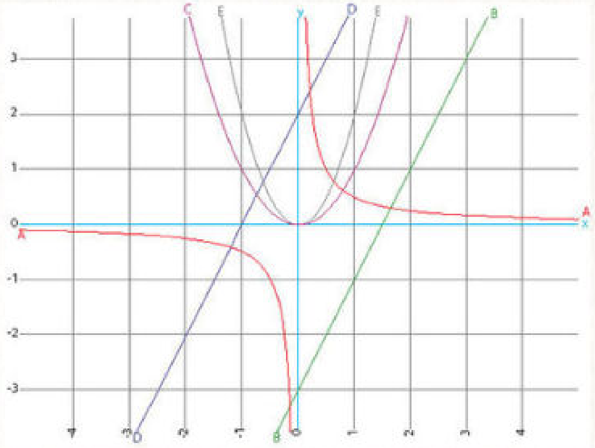


Fig. 5.18 Relaciona cada función con su gráfica.

Función	Gráfica
$y = \frac{1}{2x}$	
$y = 2x+2$	
$y = 2x-3$	
$y = 2x^2$	
$y = 2x^2+4$	
$y = x^2$	

Tabla 5.9

6. Apoyados por su docente, organicen una dinámica a escala grupal: revisen los procedimientos seguidos en cada ejercicio, esclarezcan las dudas y arriben a conclusiones comunes.

Lección 5.6

Probabilidad

Eje: Manejo de la información.

Tema: Nociones de probabilidad.

Actividad individual

Conocimientos previos

Recordarás que en la lección 1.6 de este libro mencionamos la escala de valores en los que se representa la probabilidad de un evento y se mencionó que cuando un evento era igualmente probable que ocurriera lo llamamos evento honesto. De hecho, la probabilidad de ese evento es justo cuando obtenemos $P(A) = \frac{1}{2}$, a ello se le conoce también como evento equiprobable.

Una manera de identificar si un evento es equiprobable es analizar el espacio muestral, ya que al ver las posibilidades de obtener un resultado se puede saber si existe la misma posibilidad de ganar o perder.

Por ejemplo, un evento clásico de equiprobabilidad consiste en lanzar una moneda, puesto que el espacio muestral $\Omega=\{\textit{águila, sol}\}$ tiene sólo dos resultados: al lanzar la moneda se puede obtener uno de dos resultados, así que es igualmente probable obtener águila o sol.

- Revisa la lección 1.6 correspondiente al bloque 1.

Actividad en parejas

En parejas, jueguen a lo siguiente. Marquen un lado de una moneda con el número 1 y el otro con el número 2, dibujen en su cuaderno un tablero con diez casillas y un carril para cada uno. Marquen la casilla número 1 como inicio y la 10 como meta; jueguen a ver quién llega primero a la meta lanzando la moneda, avancen el número de casillas que indique la moneda. Al terminar, contesten las siguientes preguntas:

- ¿En cualquier carril se tiene la misma probabilidad de ganar? ¿Por qué?
- ¿Habrá algún carril que siempre le gane a los demás? Argumenten su respuesta.
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane el carril número 1? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane el carril número 2? ¿Por qué?
- ¿Este juego es equiprobable? ¿Por qué?
- Si en vez de jugar con la moneda se jugara con un dado, ¿sería un evento equiprobable? ¿Por qué?
- Contrasten sus respuestas con las de otros estudiantes; compartan los razonamientos y los procedimientos que siguieron para contestar.
- Bajo la guía de su docente, establezcan conclusiones a escala grupal.

Actividad en equipo

En equipos, recorten una hoja de papel en cuadros pequeños hasta juntar 40 pedazos, lancen un dado y tomen el número de papeles que indique el dado hasta que no quede ninguno, cuenten quién tiene más para conocer al ganador y contesten las siguientes preguntas:

- ¿Son justas las reglas del juego? ¿Por qué?
- ¿Ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar? ¿Por qué?
- ¿Qué condiciones debe haber para tener la misma probabilidad de ganar?
- ¿El juego es equiprobable? Expliquen por qué.
- Repitan el juego pero ahora con dos dados y vuelvan a contestar las preguntas anteriores, completen la tabla 5.10 con los posibles resultados. Discutan con el profesor sus resultados. Observen la tabla, completen y contesten:

Caras dado 2	Caras dado 1 y diferencia de puntos											
	1	difer.	2	difer.	3	difer.	4	difer.	5	difer.	6	difer.
1	(1,1)	0										
2					(3,2)	1					(6,2)	4
3									(5,3)	2		
4												
5			(2,5)	3								
6	(6,1)	5										

Tabla 5.10

- ¿Cuántas formas diferentes hay para que la diferencia…?:

Sea cero

Sea uno

Sea dos

Sea tres

Sea cuatro

- Apoyados por su docente, organicen una dinámica a escala grupal: revisen los procedimientos seguidos en el ejercicio, esclarezcan las dudas y arriben a conclusiones comunes.

Evaluación

Resuelve los siguientes problemas primero de manera individual; después, reúnete con otro estudiante para repasar sus procedimientos y resultados.

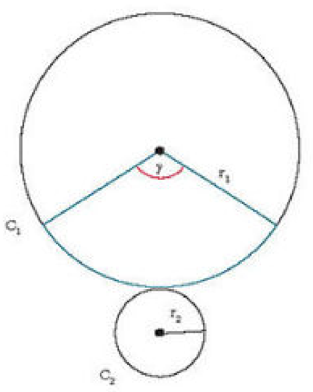
1. Almudena compró en una papelería 3 libretas y 5 tijeras por \$19, y Alejandro compró 4 libretas y 2 tijeras por \$16. ¿Cuánto cuesta cada libreta y cada tijera?

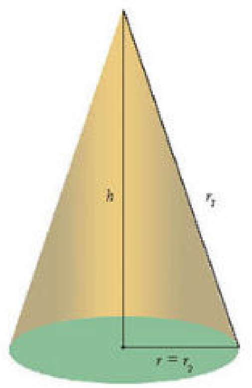
a) Libreta: \$ 2 Cuaderno: \$ 3 b) Libreta: \$ 3 Cuaderno: \$ 2 c) Libreta: \$ 4 Cuaderno: \$ 2 d) Libreta: \$ 3 Cuaderno: \$ 5

2. Paola, Lorena y Andrea tienen entre las tres 82 años de edad. La edad de Paola excede en 10 años a la de Andrea y en 4 años a la de Lorena. ¿Qué edad tiene cada una?

a) Paola: 32 Lorena: 28 Andrea: 22 b) Paola: 22 Lorena: 16 Andrea: 12 c) Paola: 30 Lorena: 28 Andrea: 24 d) Paola: 30 Lorena: 27 Andrea: 25

3. Determina las medidas r_1, r_2 y γ necesarias para construir el desarrollo plano de un cilindro de altura $h = 12$ y base de radio $r = 5$.





a) $r_1 = 17$ $r_2 = 5$ $\gamma \approx 100°$ b) $r_1 = 13$ $r_2 = 5$ $\gamma \approx 120°$ c) $r_1 = 13$ $r_2 = 10$ $\gamma \approx 180°$ d) $r_1 = 13$ $r_2 = 5$ $\gamma \approx 138.46°$

4. Un silo tiene una capacidad de 21.7 m³. Si tiene un radio de 1.20 m y se considera $\pi = 3.14$, ¿cuánto tendrá de altura?

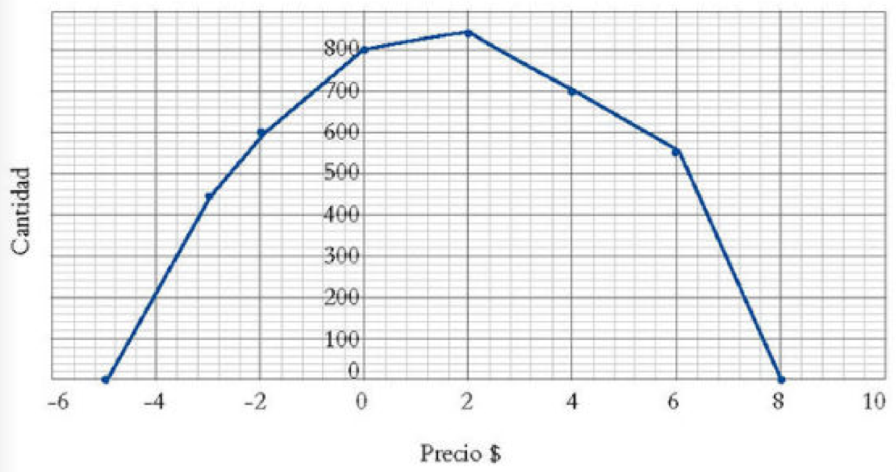
a) 5.76 m b) 4.8 m c) 2.88 m d) 10 m

Si en lugar de granos quisieran guardar agua, ¿cuántos litros cabrían?

a) 2.17 L b) 4.8 L c) 1 000 L d) 21 700 L

5. La ganancia máxima de un producto está dada por la ecuación:

$$P = -20x^2 + 60x + 800$$



- ¿Cuál es el precio al que hay que vender el producto para que genere la ganancia máxima?

a) \$ 1.50 b) \$ 2 c) \$5 d) \$ 8

- ¿Cuántos productos hay que vender a ese precio para que genere la ganancia máxima?

a) 60 b) 100 c) 500 d) 840

- ¿Qué sucede si vendo mi producto a \$8? ____________________
- ¿Qué cantidad de producto tengo que vender para no tener ganancias ni pérdidas? ____________________

6. Determina cuáles de los siguientes experimentos son predeterminados y cuáles son aleatorios:

- jugar lotería ________
- mezclar agua y azúcar ________
- enfriar agua a 0° C ________
- lanzar una piedra y medir su alcance ________
- comprar un número de rifa ________

7. Señala el espacio muestral de los siguientes experimentos:

- lanzar una moneda ________________
- lanzar dos monedas ________________
- lanzar un dado ________________

8. Comparte tus respuestas con otros estudiantes y relata los procedimientos y razonamientos que seguiste para contestar. Bajo la asesoría del docente, validen los resultados ante el grupo.

Bibliografía

- Aragón B. M. y Santiago Valiente B., *En el amable mundo de las matemáticas*, México, Patria, 1981.
- Blatner, David, *El encanto de Pi*, Libros del rincón: Espejo de Urania, México, Secretaría de Educación Pública, Aguilar, 2003.
- Guik, E,.Y., *Juegos matemáticos recreativos*, Moscú, Mir, 1987.
- Hernández, O., *Elementos de probabilidad y estadística*, México, Fondo de Cultura Económica, 1978.
- Isaac, R., *The Pleasures of probability*, Nueva York, Springer-Verlag, 1995.
- Langdon, N. y CH. Snape, *El fascinante mundo de las matemáticas*, Libros del rincón: Espejo de Urania, México, Limusa, 2004.
- Parzen, E., *Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones*, México, Limusa-Wiley, 1971.
- Perelman, Yakov, *Álgebra recreativa*, Moscú, Mir, 1986.
- Perelman, Yakov, *Matemáticas recreativas*, España, Rodesa, 2007.
- Steinbring, H., *The concept of chance in everyday teaching: aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. Educational studies in mathematics*, Holanda, Kluwer, vol. 22, 1991.
- Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Noriega Editores, 1994.

Bibliografía para el alumno

- Batanero, Ma. C., Juan Díaz Godino y Virginia Navarro Pelayo, *Razonamiento combinatorio*, Madrid, Síntesis, 1996.
- Blatner, David, *El encanto de Pi*. Libros del rincón: Espejo de Urania, México, Secretaría de Educación Pública, Aguilar, 2003.
- Guedj, Denis, *El teorema del loro: Novela para aprender matemáticas*, España, Anagrama, 2000.
- Langdon, N. y CH. Snape, *El fascinante mundo de las matemáticas*, Libros del rincón: Espejo de Urania, México, Limusa, 2004.
- Larousse, *40 fantásticos experimentos: materiales y materia*, México, Larousse de México, 2004.
- Paenza, Adrián, *Matemática… ¿Estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades*, Argentina, Siglo XXI Editores, 2005.
- Paulos, J. A. *Más allá de los números: Meditaciones de un matemático*, 3ª. ed., España, Tusquets, 2003.
- Perelman, Yakov, *Matemáticas recreativas*, España, Rodesa, 2007.
- Prieto, Carlos, *Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas*, México, Fondo de Cultura Económica, 2009.

Bibliografía para el maestro

- Allen Paulos, John, *El hombre anumérico*, Barcelona, Tusquets, 2007.
- Autores varios, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Relime, 1997-2006.
- García Juárez, Marco Antonio. *Matemáticas I: Para preuniversitarios*, Estado de México, Esfinge, 1995.
- Grupo Azarquiel, *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Madrid, Síntesis, 1992.
- Haigh, John, *Matemáticas y juegos de azar*, Barcelona, Tusquets, 2003.
- Hernández, y Carrillo, Oteyza, Lam, *Álgebra*, México, Pearson, 2007.
- Macías, M.T, *Vive las matemáticas 3*, México, Esfinge, 2008.
- Stewart, Ian, *Historia de las matemáticas: En los últimos 10 000 años*, España, Crítica, 2009.
- Waldegg, G., R. Villaseñor y V. García, *Matemáticas en Contexto 2*, México, Esfinge, 2008.

Sitios de internet y multimedia

- Geometría dinámica
  www.geometriadinamica.es La página ofrece explicaciones teóricas y ejercicios que facilitan auxilian al alumno en el entendimiento de varios conceptos. Consultada el 2 de octubre de 2014.
- Geogebra
  www.geogebra.org Geo Gebra es un software libre con utilitarios de matemáticas y ciencias con interacciones dinámicas de geometría, álgebra, estadísticas y recursos de análisis y cálculo. Consultada el 2 de octubre de 2014.
- Geogebratube
  www.geogebratube.org Ofrece tutoriales en video para el entendimiento de conceptos de geometría, álgebra, estadísticas y recursos de análisis y cálculo de forma interactiva y para el óptimo aprovechamiento del software Geo Gebra. Consultada el 2 de octubre de 2014.
- Inegi
  www.inegi.org.mx Página del Instituto Nacional de Estadística y Geografía. Fuente de información estadística de México. Consultada el 2 de octubre de 2014.
- Junta de Andalucia
  www.juntadeandalucia.es/averroes/ Página de la Junta de Andalucía de España donde se puede consultar recursos educativos y elementos para la interpretación de gráficas. Consultada el 2 de octubre de 2014.
- Cameuan
  www.cameuan.com.mx/geolab/VARIACION/VARIACION.html Lenguaje y Pensamiento Matematico con GeoGebra, Proyecto GeoLab, Universidad Autónoma de Nayarit. Consultado el 2 de octubre de 2014.
- UNAM
  www.estadistica.unam.mx/numeralia/ Portal de Estadística Universitaria. Consultado el 2 de octubre de 2014.
- ILCE
  www.redescolar.ilce.edu.mx Red Ilce, sitio donde se fomenta el aprendizaje y la cultura digitales. Consultado el 2 de octubre de 2014.
- Tutor Matemáticas
  www.tutormatematicas.com Tutoriales matemáticos en video. Consultado el 2 de octubre de 2014.

Créditos iconográficos

- © Shutterstock.com pp. 58, 59, 61, 73, 93, 94, 95, 96, 103, 104, 116, 145, 169, 186, 187, 217, 255, 256, 257, 258
- © Wikipedia pp. 107, 137, 144
- © A.E. pp. 96, 101, 103, 167
- © Google imágenes pp. 198, 258